

# **Niederdimensionale Galerkin-Modelle für laminare und transitionelle freie Scherströmungen**

HABILITATIONSSCHRIFT

Fakultät V — Verkehrs- und Maschinensysteme  
Technische Universität Berlin

vorgelegt von  
**Bernd R. Noack**

Institut für Strömungsmechanik und Technische Akustik  
der Technischen Universität Berlin

2006

**D 83**



# Niederdimensionale Galerkin-Modelle für laminare und transitionelle freie Scherströmungen

HABILITATIONSSCHRIFT

zur Erlangung der Lehrbefähigung (venia legendi)  
im Fachgebiet „Strömungsmechanik“  
an der Fakultät V — Verkehrs- und Maschinensysteme  
der Technischen Universität Berlin

vorgelegt von

**Bernd R. Noack**

geboren in Korbach

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. rer.nat. A. Dillmann (Göttingen)  
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. F. Thiele (TU Berlin)

Tag der Eröffnung des Habilitationsverfahrens: 2. November 2005  
Tag der Zuerkennung der Lehrbefähigung: 26. Juli 2006  
Tag der Ausstellung der Habilitationsurkunde: 26. Juli 2006  
Tag der Aushändigung der Habilitationsurkunde: 15. September 2006

Berlin, 2006

**D 83**



# Vorwort

In der Strömungsmechanik hat die niederdimensionale Grobstruktur-Modellierung in den letzten beiden Jahrzehnten eine stürmische Entwicklung erfahren. Sie nimmt als Bindeglied zwischen Experiment, numerischer Simulation, Theorie und verschiedenen mathematischen Disziplinen eine zunehmend wichtigere Rolle ein.

In den 80-er Jahren wurde die niederdimensionale holzschnittartige Nachbildung der Grobstrukturen von der Erwartung belebt, wichtige Einsichten zur Lösung des Turbulenzproblems zu ermöglichen. Ganz wesentlich hat dazu in den 70-er Jahren die Theorie dynamischer Systeme mit überraschenden universellen Transitionsszenarien, z.B. dem Feigenbaum- und Intermittenz-Szenario, beigetragen. Ein weiterer Beitrag dieser Theorie lag in überschaubaren niederdimensionalen Modellen mit Turbulenzeigenschaften, z.B. dem Lorenz-Attraktor. Die technischen Herausforderungen bei der Entwicklung von niederdimensionalen Modellen schon für geometrisch einfache Strömungen beschränkte die Disziplin auf eine kleine Anzahl von maßgeblichen Institutionen.

In den 90-er Jahren wurde das Potenzial dieser Disziplin auch für die modellbasierte Strömungsbeeinflussung realisiert und damit auch für ingenieurmäßige Problemstellungen interessant. Vorreiter war der Einzug regelungstechnischer Methoden in die aktive Strömungsbeeinflussung. In Simulationen und Experimenten wurde gezeigt, dass in der Rückkopplung von Sensorinformationen in die Aktuation ein wichtiges, bislang unerschlossenes Potenzial für die Leistungsverbesserungen von Verkehrsträgern liegt. Grundlage hierfür sind oft empirisch gewonnene Black-Box-Modelle ohne expliziten Bezug zu den Grobstrukturen. Es wurde schnell ersichtlich, dass eine modellbasierte Optimierung der Aktuation, Sensorik und Regelung die explizite dynamische Modellierung der Grobstrukturen bedingt. Für die Entwicklung einer fehlertoleranten, online-fähigen Regelung reichen Modelle, welche die wenigen dominierenden Grobstrukturen auflösen. Hochdimensionale akkuratere Beschreibungen sind regelungstechnisch kaum handhabbar. Diese Beschränkung auf wenige Freiheitsgrade schließt gängige Verfahren der numerischen Strömungsmechanik aus.

Ich hatte das Privileg, beide Richtungen der niederdimensionalen Modellierung in engagierten Gruppen miterleben zu dürfen. Ende der 80-er Jahre galten einige Projekte des Max-Planck-Instituts für Strömungsforschung — wie an anderen grundlagenorientierten Institutionen — dem Aufsuchen von „seltsamen niederdimensionalen Attraktoren“ aus experimentellen Daten und in

dynamischen Modellen. Diese Suche wurde bald nach vielen ernüchternden Resultaten aufgeben. Jedoch wurde in meiner Doktorarbeit mit den ersten niederdimensionalen Galerkin-Modellen von laminaren und transitionellen Nachlaufströmungen eine Grundlage für meine weiteren Arbeiten gelegt. Ich bin meinem Doktorvater, Herrn Prof. H. Eckelmann, als Vorbild, unvergeßlichem Lehrer und Freund zu tiefem Dank verpflichtet. Er vermittelte eine ausgesprochen spannende und stimulierende Arbeitsumgebung und ich hatte die Chance, bis zu meinen ersten Erfolgen viele unbrauchbare Galerkin-Modelle mit literaturüblichen Verfahren entwickeln zu dürfen, ohne von ihm einen einzigen Ausdruck der Ungeduld oder des Zweifels zu erleben.

Am United Technologies Research Center, einem amerikanischen Industrieforschungslabor, hatte ich die Möglichkeit, in einem engagierten Team entscheidende Erfahrungen an industrienahen Problemen zur Ablösungs-, Mischungs-, und Lärmbeeinflussung zu gewinnen und die niederdimensionale Modellierung dort einzubringen. Besonderen Dank gebührt hier meinen engsten Kollegen Drs. A. Banaszuk, A. Khibnik und S. Narayanan, sowie den externen Kooperationspartnern Profs. G. Haller, E. Meiburg, I. Mezić und G. Tadmor. In dieser Zeit reiften viele heute noch verfolgte Ideen und Pläne für die modellbasierte Strömungsregelung.

An der TU Berlin bot mir der Sonderforschungsbereich (Sfb 557) „Beeinflussung komplexer turbulenter Scherströmungen“, ausgezeichnete Forschungsbedingungen, um grundlagenorientierte und anwendungsnahe Aspekte der niederdimensionalen Modellierung zu vertiefen. Die Beiträge zu den Grundlagen werden in vorliegender Arbeit dokumentiert. Besonderen Dank gebührt den Sprechern und Projektpartnern des Sfb, Herrn Prof. A. Dillmann und Herrn Prof. R. King, für ihre Unterstützung und für eine fruchtbare Zusammenarbeit. Die meisten Erfolge wären nicht denkbar ohne meine engen Kooperationspartner, den Herren Prof. M. Morzyński, Prof. G. Tadmor, Prof. F. Thiele, Dipl.-Inf. T. Weinkauff und den Mitarbeitern des „C5-Teams“: O. Lehmann, W. Liu, Dipl.-Ing. M. Luchtenburg, Dipl.-Ing. M. Pastoor, Dr. M. Schlegel und J. Scouten. Bei den Herren Prof. P. Comte, Prof. P.A. Monkewitz, Dr. G. Mutschke und Prof. P. Papas bedanke ich mich für Daten zu den Scherschichtinstabilitäten und Nachlaufsimulationen sowie anregende Diskussionen. Mit den Profs. D. Rempfer und L. Cordier hatte ich wichtige Gesprächspartner auf dem Gebiet der empirischen Galerkin-Modellierung.

Bei den Herren Profs. A. Dillmann und F. Thiele bedanke ich mich insbesondere für die Übernahme der Gutachtertätigkeit zu dieser Arbeit.

Berlin, im Juli 2006

Bernd R. Noack

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>iii</b>
<b>Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen</b>	<b>vii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Mathematische Beschreibung instationärer Strömungen . . . . .	1
1.2 Strömungsbeeinflussung für Verkehrssysteme . . . . .	5
1.3 Niederdimensionale Modellierung . . . . .	7
<b>2 Einführung in das Galerkin-Verfahren</b>	<b>9</b>
2.1 Petrov-Galerkin-Verfahren . . . . .	9
2.2 Beispiel eines gewöhnlichen Differentialgleichungs-Systems . . . . .	13
2.2.1 Differentialgleichungs-System . . . . .	13
2.2.2 Karhunen-Loève-Zerlegung . . . . .	15
2.2.3 Galerkin-Modell . . . . .	15
2.3 Beispiel einer partiellen Differentialgleichung . . . . .	17
2.3.1 Differentialgleichungs-System . . . . .	17
2.3.2 Karhunen-Loève-Zerlegung . . . . .	18
2.3.3 Galerkin-Modell . . . . .	21
<b>3 Niederdimensionale Galerkin-Modellierung</b>	<b>23</b>
3.1 Galerkin-Methode . . . . .	23
3.2 Galerkin-Darstellung des Druckterms . . . . .	27
3.3 Galerkin-Darstellung der Transienten . . . . .	30
3.4 Globale und modale Energiefluss-Analyse . . . . .	34
<b>4 Analyse und Modellierung des Nachlaufs eines Kreiszyinders</b>	<b>39</b>
4.1 Direkte numerische Simulation . . . . .	40
4.2 Niederdimensionale Beschreibung des laminaren Nachlaufs . . . . .	42
4.2.1 Karhunen-Loève-Zerlegung . . . . .	42
4.2.2 Energiefluss-Analyse . . . . .	44
4.3 Niederdimensionale Beschreibung der A-Mode . . . . .	48
4.3.1 Karhunen-Loève-Zerlegung . . . . .	48

4.3.2	Energiefluss-Analyse . . . . .	50
4.4	Niederdimensionale Beschreibung der B-Mode . . . . .	51
4.4.1	Karhunen-Loève-Zerlegung . . . . .	52
4.4.2	Energiefluss-Analyse . . . . .	53
4.5	Niederdimensionale Galerkin-Modellierung . . . . .	53
4.5.1	Galerkin-System . . . . .	55
4.5.2	Galerkin-Modelle der periodischen Strömungen . . . . .	56
4.5.3	Galerkin-Modell des einschwingenden Nachlaufs . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Analyse und Modellierung einer Scherströmung</b>	<b>65</b>
5.1	Direkte numerische Simulation . . . . .	67
5.2	Niederdimensionale Beschreibung der laminaren Scherströmung . . . . .	69
5.2.1	Karhunen-Loève-Zerlegung . . . . .	69
5.2.2	Energiefluss-Analyse . . . . .	72
5.3	Niederdimensionale Beschreibung der transitionellen Scherströmung . . . . .	74
5.3.1	Karhunen-Loève-Zerlegung . . . . .	74
5.3.2	Energiefluss-Analyse . . . . .	75
5.4	Niederdimensionale Galerkin-Modellierung . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Weiterentwicklungen für komplexere Strömungen und für die Strömungsregelung</b>	<b>81</b>
6.1	Galerkin-Modellierung von turbulenten Strömungen . . . . .	81
6.2	Galerkin-Modellierung für die Strömungsregelung . . . . .	83
6.3	Aktuelles System mit Galerkin-Bausteinen und zukünftige Entwicklungen . . . . .	87
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>91</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>95</b>
<b>A</b>	<b>Karhunen-Loève-Zerlegung einer Strömung</b>	<b>105</b>
A.1	Zerlegung im Ortsbereich . . . . .	105
A.2	Zerlegung im Zeitbereich . . . . .	107
A.3	Schnappschuss-Methode . . . . .	108

# Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

## Allgemeine Regeln

Die meisten Symbole genügen folgenden allgemeinen Regeln:

- $A \dots Z \dots$  Ordnungsparameter, welche die Navier-Stokes- oder die Galerkin-Lösung charakterisieren, werden mit großen lateinischen Buchstaben abgekürzt oder fangen mit diesen an.
- $a \dots z \dots$  Reelle oder komplexe Zahlen bzw. reell- oder komplexwertige Felder werden durch kleine lateinische Buchstaben bezeichnet.
- $\mathbf{a} \dots \mathbf{z} \dots$  Vektoren oder Vektorfelder werden durch Fettdruck hervorgehoben.
- $\mathbf{A} \dots \mathbf{Z} \dots$  Matrizen werden mit lateinischen Großbuchstaben im Fettdruck bezeichnet.
- $\mathcal{A} \dots \mathcal{Z} \dots$  Operatoren in Abhängigkeit vom Strömungsfeld werden im kalligrafischen Schrifttyp gekennzeichnet.
- $\alpha \dots \omega \dots$  Kleine griechische Symbole sind mit der Navier-Stokes-Lösung assoziierte Konstanten.
- $A \dots \Omega \dots$  Entsprechende Großsymbole sind Mengen oder Ordnungsparameter.

## Lateinische Symbole für Holoren<sup>1</sup>

- $A \dots$  Amplitude
- $A_{2D} \dots$  Amplitude einer 2D Stabilitätseigenmode
- $A_{3D} \dots$  Amplitude einer 3D Stabilitätseigenmode
- $\mathbf{a} \dots$  Vektor mit Fourier-Koeffizienten
- $a_i \dots$  Fourier-Koeffizient der  $i$ -ten Mode
- $\mathcal{A} \dots$  Operator für die Anfangsbedingung
- $\mathbf{B} \dots$  Matrix zur Darstellung des Kraftterms in dem Galerkin-System
- $\mathbf{b} \dots$  Vektor mit Fourier-Koeffizienten
- $b_i \dots$  Fourier-Koeffizient der  $i$ -ten Mode
- $b_{ij} \dots$  Hilfsgröße bei der Konvektion-Diffusions-Gleichung
- $\mathbf{C} \dots$  Zeitliche Korrelationsmatrix
- $C \dots$  Zeitliche Korrelationsfunktion

---

<sup>1</sup>Holoren umfassen nach [67] u.a. reelle und komplexe Zahlen, sowie die meisten daraus zusammen gesetzten Größen, z.B. Vektoren, Matrizen und Tensoren.

$c_{ij}$ .....	Galerkin-System-Koeffizient des Konvektivterms bei der Konvektion-Diffusions-Gleichung
$c_i^\bullet$ .....	Konvektions-Effizienz der $i$ -ten Mode
$\mathcal{C}_\Omega$ .....	Konvektion von Fluktuationsenergie durch das Gebiet $\Omega$
$\mathcal{C}_i$ .....	Beitrag der $i$ -ten Mode zur Konvektion
$D$ .....	Zylinderdurchmesser
$d_{ij}$ .....	Galerkin-System-Koeffizient des Diffusionsterms bei der Konvektion-Diffusions-Gleichung
$d_i^\bullet$ .....	Dissipations-Effizienz der $i$ -ten Mode
$\mathcal{D}_\Omega$ .....	Dissipation von Fluktuationsenergie durch das Gebiet $\Omega$
$\mathcal{D}_i$ .....	Beitrag der $i$ -ten Mode zur Dissipation
$\mathbf{e}_x$ .....	Einheitsvektor in $x$ -Richtung
$\mathbf{e}_y$ .....	Einheitsvektor in $y$ -Richtung
$\mathbf{e}_z$ .....	Einheitsvektor in $z$ -Richtung
$\mathbf{e}_i$ .....	Einheitsvektor in die $i$ -te Phasenraum-Richtung
$\mathbf{f}$ .....	Fluss des dynamischen Systems
$\mathbf{f}_i^*$ .....	$i$ -te Eigenmode einer Stabilitätsanalyse
$f_i$ .....	$i$ -te Komponente des Flusses des dynamischen Systems
$f_i^\bullet$ .....	Druckleistungs-Effizienz der $i$ -ten Mode
$f$ .....	Wirbelfolgefrequenz
$\mathcal{F}_\Omega$ .....	Druckleistung der Fluktuationsenergie am Gebietsrand $\partial\Omega$
$\mathcal{F}_i$ .....	Beitrag der $i$ -ten Mode zur Druckleistung
$\mathbf{G}$ .....	Vektor mit den Aktuationsamplituden
$G$ .....	Aktuationsamplitude
$G_\gamma$ .....	$\gamma$ -te Aktuationsamplitude
$\mathbf{g}$ .....	Aktuation im dynamischen System; Kraftterm in der Navier-Stokes-Gleichung
$\mathbf{g}_\gamma$ .....	$\gamma$ -te Mode des Kraftterms in der Navier-Stokes-Gleichung
$i, j, k$ .....	Indizes der Moden
$\mathcal{I}$ .....	Indexmenge
$K$ .....	Fluktuationsenergie in ausgewählten Moden
$k$ .....	Wellenzahl
$\mathcal{K}_\Omega$ .....	Fluktuationsenergie im Gebiet $\Omega$
$\mathcal{K}_i$ .....	Beitrag der $i$ -ten Mode zur Fluktuationsenergie
$\mathbf{L}$ .....	Matrix des Korrekturterms beim dynamischen Beobachter
$L_z$ .....	Wellenlänge in Spannrichtung
$l_{ij}$ .....	Galerkin-System-Koeffizient der Konvektion-Diffusions-Gleichung; Galerkin-System-Koeffizient für die Darstellung des Zähigkeitsterms der Navier-Stokes-Gleichung

$l_{ij}^p$ .....	Galerkin-System-Koeffizient für die linearisierte Druckterm-Darstellung
$l_{ij}^\omega$ .....	Galerkin-System-Koeffizient für die Darstellung des Zähigkeitsterms der Wirbeltransport-Gleichung
$M$ .....	Anzahl der Schnappschüsse
$m$ .....	Index eines Schnappschusses
$m_{ij}$ .....	Element der Massenmatrix des Galerkin-Systems nach Projektion auf die Navier-Stokes-Gleichung
$m_{ij}^\omega$ .....	Element der Massenmatrix des Galerkin-Systems nach Projektion auf die Wirbeltransport-Gleichung
$N$ .....	Anzahl der Moden; Anzahl der Freiheitsgrade
$N_G$ .....	Anzahl der Moden zur Darstellung des Kraftterms in der Navier-Stokes-Gleichung
$N_W$ .....	Anzahl der Aktuationsmoden
$\mathbf{n}$ .....	Einheits-Flächennormale
$n$ .....	Index eines Schnappschusses
$\mathcal{N}$ .....	Operator für die Bewegungsgleichung
$p$ .....	Druck. Die Lösungs-Indizes $,s'$ , $,0'$ , etc. haben die gleiche Bedeutung wie bei dem Geschwindigkeitsfeld.
$p_{jk}$ .....	Partialdruck
$p_i^\bullet$ .....	Produktions-Effizienz der $i$ -ten Mode
$\mathcal{P}_\Omega$ .....	Produktion von Fluktuationsenergie im Gebiet $\Omega$
$\mathcal{P}_i$ .....	Beitrag der $i$ -ten Mode zur Produktion
$Q$ .....	Okubo-Weiss-Parameter
$q$ .....	Fluktuationsenergie (Feldgröße)
$q_{ijk}^k$ .....	Galerkin-System-Koeffizient für die Darstellung des Konvektionsterms der Navier-Stokes-Gleichung
$q_{ijk}^p$ .....	Galerkin-System-Koeffizient für die Darstellung des Druckterms der Navier-Stokes-Gleichung
$q_{ijk}$ .....	Galerkin-System-Koeffizient für die Darstellung des Konvektions- und Druckterms der Navier-Stokes-Gleichung
$q_{ijk}^\omega$ .....	Galerkin-System-Koeffizient für die Darstellung des Konvektions- und Streckungstermes der Wirbeltransport-Gleichung
$Re$ .....	Reynolds-Zahl
$\mathbf{R}$ .....	Autokorrelations-Funktion des Geschwindigkeitsfeldes; Korrelationsmatrix bei der Konvektion-Diffusions-Gleichung
$R_{ij}$ .....	Komponente der Korrelationsmatrix
$R$ .....	Korrelationsfunktion bei der Konvektion-Diffusions-Gleichung

$R_A$ . . . . .	Residuum der Anfangsbedingung
$R_N$ . . . . .	Residuum der Differenzialgleichung
$R_R$ . . . . .	Residuum der Randbedingung
$R_u$ . . . . .	Residuum der Galerkin-Approximation
$R_u^2$ . . . . .	gemitteltes Residuumsquadrat der Galerkin-Approximation
$\mathcal{R}_E$ . . . . .	Residuum der Fluktuationsenergie-Bilanzgleichung
$\mathcal{R}$ . . . . .	Operator für die Randbedingung
$\mathbf{S}$ . . . . .	Vektor mit Sensor-Signalen
$St$ . . . . .	Strouhal-Zahl
$s$ . . . . .	Bogenlänge (Integrationsparameter)
$s$ . . . . .	Quellterm der Druck-Poisson-Gleichung
$s_{jk}$ . . . . .	Koeffizient zur Darstellung der Quellterm-Entwicklung der Druck-Poisson-Gleichung
$T$ . . . . .	Periode oder Zeitspanne
$t$ . . . . .	Zeit
$t_0$ . . . . .	Anfangszeitpunkt
$t_m$ . . . . .	Zeitpunkt des $m$ -ten Schnappschusses
$t_i^\bullet$ . . . . .	Transferterm-Effizienz der $i$ -ten Mode
$\mathcal{T}_\Omega$ . . . . .	Transferterm der Fluktuationsenergie im Gebiet $\Omega$
$\mathcal{T}_i$ . . . . .	Beitrag der $i$ -ten Mode zum Transferterm
$U$ . . . . .	Anströmgeschwindigkeit bei der Zylinderumströmung
$U_1$ . . . . .	Geschwindigkeit des schnelleren Stroms bei der Scherschicht
$U_2$ . . . . .	Geschwindigkeit des langsameren Stroms bei der Scherschicht
$U_c$ . . . . .	Konvektionsgeschwindigkeit der Wirbel
$\mathbf{u}$ . . . . .	Geschwindigkeitsvektor
$\mathbf{u}_{RB}$ . . . . .	vorgegebene Geschwindigkeit am Gebietsrand
$\mathbf{u}_B$ . . . . .	Geschwindigkeit der Grundströmung
$\mathbf{u}_s$ . . . . .	Geschwindigkeit der stationären Navier-Stokes-Lösung
$\mathbf{u}_p$ . . . . .	Geschwindigkeit der periodischen Navier-Stokes-Lösung
$\mathbf{u}^{(m)}$ . . . . .	$m$ -ter Schnappschuss der Geschwindigkeit
$\mathbf{u}_0$ . . . . .	gemittelte Geschwindigkeit
$\mathbf{u}_i$ . . . . .	$i$ -te Mode der Galerkin-Approximation
$\mathbf{u}_i^\pi$ . . . . .	Beitrag der $i$ -ten Mode zur Geschwindigkeitsfluktuation ( $a_i \mathbf{u}_i$ )
$\mathbf{u}^{[N]}$ . . . . .	Galerkin-Approximation mit $N$ Moden
$\mathbf{u}_i^*$ . . . . .	$i$ -te Eigenmode einer Stabilitätsanalyse der stationären Navier-Stokes-Lösung
$\mathbf{u}_{2D}^*$ . . . . .	instabilste 2D Eigenmode einer Stabilitätsanalyse
$\mathbf{u}_{3D}^+$ . . . . .	instabilste 3D Eigenmoden einer Stabilitätsanalyse
$\mathbf{u}_{3D}^-$ . . . . .	symmetrisches Pendant zu $\mathbf{u}_{3D}^+$ .
$\mathbf{u}_\Delta$ . . . . .	Verschiebungsmode

$\mathbf{u}_{\Delta}^{(a)}$ .....	Mean-Field-Korrektur
$\mathbf{u}_{\Delta}^{(b)}$ .....	Orthonormierte Mean-Field-Korrektur
$\mathbf{u}'$ .....	Geschwindigkeitsfluktuation
$\mathbf{u}_{\text{koh}}$ .....	kohärenter Anteil der Geschwindigkeitsfluktuation
$\mathbf{u}_{\text{inkoh}}$ .....	inkohärenter Anteil der Geschwindigkeitsfluktuation
$u$ .....	Komponente des Geschwindigkeitsvektors in $x$ -Richtung
$u_i$ .....	$i$ -te Karhunen-Loève-Mode der Konvektion-Diffusions-Gleichung
$v$ .....	Komponente des Geschwindigkeitsvektors in $y$ -Richtung
$w$ .....	Komponente des Geschwindigkeitsvektors in $z$ -Richtung
$\mathbf{x}$ .....	Ortsvektor
$x$ .....	kartesische Koordinate in Strömungsrichtung
$y$ .....	kartesische Koordinate in Scherrichtung
$z$ .....	kartesische Koordinate in Spannrichtung

## Griechische Symbole für Holoren

$\alpha$ .....	Wellenzahl in Strömungsrichtung bei der Scherschicht; Imaginärteil einer komplexen Wellenzahl bei der Konvektion-Diffusions-Gleichung
$\beta$ .....	Wellenzahl in Spannrichtung bei der Scherschicht; Realteil einer komplexen Wellenzahl bei der Konvektion-Diffusions-Gleichung
$\delta$ .....	Scherschichtdicke
$\delta_v$ .....	Wirbelschichtdicke
$\delta_{ij}$ .....	Kronecker-Symbol
$\epsilon$ .....	Kleinheits-Parameter
$\kappa$ .....	Faktor für 2D und 3D Integration
$\varkappa$ .....	Ordnungsparameter für den Strömungszustand (Betriebspunkt)
$\lambda_i^*$ .....	$i$ -ter Eigenwert einer Stabilitätsanalyse der stationären Navier-Stokes-Lösung
$\lambda_i$ .....	$i$ -ter Karhunen-Loève-Eigenwert
$\mu$ .....	Ordnungsparameter eines dynamischen Systems
$\mu_i$ .....	$i$ -ter Eigenwert des zeitlichen Fredholm'schen Eigenwertproblems (siehe Anhang)
$\nu$ .....	kinematische Viskosität des Fluids; reziproker Wert der Reynolds-Zahl
$\nu_{T,i}$ .....	turbulente Wirbelviskosität der $i$ -ten Mode
$\sigma$ .....	Wachstumsrate
$\sigma_i^*$ .....	Wachstumsrate der $i$ -ten Stabilitätseigenmode

$\chi_0^2, \chi_1^2, \chi_2^2$	Gütefunktionale der kinematischen, dynamischen und energetischen Kalibrierung, respektive
$\Psi$ .....	Stromfunktion
$\boldsymbol{\omega}$ .....	Wirbelstärke
$\omega$ .....	Kreisfrequenz
$\omega_i^*$ .....	Kreisfrequenz der $i$ -ten Stabilitätseigenmode

## Operatoren und Mengen

$\Re$ .....	Realteil-Operator
$\Im$ .....	Imaginärteil-Operator
$\cdot$ .....	inneres Produkt; einfache Kontraktion: Seien $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$ und $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)$ zwei Vektoren, dann gilt $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \dots + u_N v_N$ .
$:$ .....	doppelte Kontraktion: Seien $\mathbf{A} := (A_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ und $\mathbf{B} := (B_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ zwei quadratische Matrizen, dann gilt $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} B_{ji}$ .
$\otimes$ .....	äußeres Produkt: Seien $\mathbf{u} := (u_1, \dots, u_N)$ und $\mathbf{v} := (v_1, \dots, v_N)$ zwei Vektoren, dann ist $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = (u_i v_j)$ eine $N \times N$ Matrix.
$\overline{F}$ .....	Zeitmittelung einer Größe , $F$ '
$\dot{F}, \frac{d}{dt} F$ ...	Zeitableitung einer Größe , $F$ '
$\partial_t$ .....	partielle Zeitableitung
$\partial_x, \partial_y, \partial_z$ ..	partielle Ortsableitung nach $x, y, z$ , respektive
$\nabla$ .....	Nabla-Operator
$\nabla \cdot$ .....	Divergenz-Operator
$\nabla \times$ .....	Rotor-Operator
$\Delta$ .....	Laplace-Operator
$(F)_\Omega$ .....	Volumenintegral eines beliebigen Holors $F$ auf dem Gebiet $\Omega$
$[\mathbf{F}]_\Omega$ .....	Oberflächenintegral eines Vektors oder einer Matrix $\mathbf{F}$ auf dem Gebietsrand $\partial\Omega$
$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega$ .....	inneres Produkt zwischen $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ auf dem Gebiet $\Omega$
$\ \mathbf{u}\ _\Omega$ .....	Norm von $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ auf dem Gebiet $\Omega$
$\mathcal{A}$ .....	Residuums-Operator einer Anfangsbedingung
$\mathcal{N}$ .....	Residuums-Operator einer Differenzialgleichung
$\mathcal{R}$ .....	Residuums-Operator einer Randbedingung
$\Omega$ .....	Gebiet
$\partial\Omega$ .....	Gebietsrand

# 1. Einleitung

Die niederdimensionale Modellierung übernimmt eine wichtige Brückenfunktion zwischen der theoretischen Strömungsmechanik (§1.1) und dem aktuellen Modellbedarf für die Strömungsbeeinflussung an Verkehrsträgern (§1.2). Die daraus resultierenden Forschungsthemen, zu welchen vorliegende Arbeit einen Beitrag leisten will, wird in §1.3 erörtert.

## 1.1 Mathematische Beschreibung instationärer Strömungen

Die meisten ingenieurtechnisch auftretenden Fluidbewegungen werden durch bekannte Massen-, Impuls- und Energiebilanz-Gleichungen im Prinzip vollständig beschrieben. De facto, steigt jedoch die Anzahl der dynamisch aufzulösenden Freiheitsgrade  $N$  mit der Reynolds-Zahl  $Re$  sehr schnell mit  $N \sim Re^{9/4}$  an [51]. Diese hohe Komplexität begrenzt die Möglichkeit der direkten numerischen Simulation auf einfachste Geometrien und niedrige Reynolds-Zahlen — und zwar noch für viele Jahrzehnte. Das wichtigste und drängendste Problem der Strömungsphysik besteht daher in einer mathematischen Beschreibung der 'turbulenten Phase', welche die Fluktuationen in geeigneter Weise durch Ordnungsparameter in einer Zustandsgleichung zusammenfasst.

Die Beschreibung der Turbulenz ist seit über 100 Jahren Gegenstand intensiver Forschung und hat auch die fähigsten Köpfe aus der Mathematik (z.B. Hopf, Kolmogorov, von Neumann) und aus der Physik (z.B. Einstein, Heisenberg, Landau) angezogen. Man kann heute sagen, dass die Turbulenz inkompressibler Strömungen in ihren vielfältigen Erscheinungsformen phänomenologisch gut verstanden ist und wenig Raum für Überraschungen lässt. Dieses qualitative Verständnis mündet jedoch bei weitem noch nicht in einer vollständigen Beschreibung der turbulenten Phase. Alle bisher vorgeschlagenen Modelle verlangen viel Erfahrung mit empirischen Anpassungen für die konkret interessierende Konfiguration. Die Turbulenz gilt nach wie vor als *das* ungelöste Problem der klassischen Physik.

Reynolds (1895, [101]) hat das Turbulenzproblem mit der nach ihm benannten Gleichung in eine heute noch gültige mathematische Form gebracht. Hierbei<sup>1</sup> wird das Strömungsfeld  $\mathbf{u}$  zerlegt in eine zeitgemittelte Strömung  $\mathbf{u}_0$  und eine instationäre Fluktuation  $\mathbf{u}'$ . In ersten erfolg-

---

<sup>1</sup>De facto hat Reynolds in der Originalarbeit eine viel größere Klasse von Mittelungen betrachtet.

reichen Lösungsansätzen wird die Wirkung der Fluktuation auf die mittlere Strömung durch eine zusätzliche Wirbelviskosität modelliert [10]. Mangels allgemein gültiger Turbulenzmodelle werden Elementarströmungen untersucht, aus denen man sich komplexere Strömungen bausteinartig zusammen gesetzt denken kann. Diese Elementarströmungen beinhalten nach einer Göttinger Klassifikation: (1) Kanalströmung, (2) Grenzschicht, (3) Scherschicht, (4) Nachlauf, (5) Freistrahler und (6) Gitterturbulenz [104]. Für diese Strömungen wurde eine Vielzahl von Partikulargesetzen für transversale Profile und für das Verhalten in Strömungsrichtung bestimmt. Beispiele sind das viskose Wandgesetz, das logarithmische Wandgesetz, Intermittenz-Korrekturen für die Außenströmungen, Gesetze für das Abklingen der Gitterturbulenz sowie selbständige Fernfeldlösungen. Diese Partikulargesetze sind wichtiger Prüfstein für Turbulenzbeschreibungen, berücksichtigen jedoch nur bedingt die besondere Rolle von Grobstrukturen.

Townsend hat 1956 die dynamische Wirkung von Grobstrukturen auf die mittlere Strömung herausgearbeitet [124]. Es folgten eine Vielzahl von experimentellen Arbeiten mit immer weiteren Grobstrukturen für die oben genannten Elementarströmungen. Dem unbefriedigenden subjektiven Bias bei diesen Grobstruktur-Extraktionen wurde durch den Versuch einer allgemein gültigen Definition Rechnung getragen. Bereits 1957 hat Lorenz in einer wenig beachteten Arbeit die Karhunen-Loève-Zerlegung von Strömungsdaten in die energiereichsten Moden vorgeschlagen. Lumley hat diese Zerlegung 1967 unter dem Namen 'Proper Orthogonal Decomposition' (POD) als objektivere Definition von Grobstrukturen vorgeschlagen [55]. Fünf Jahre später [102] wurde der Reynolds'sche Ansatz verfeinert durch eine Zerlegung der Fluktuation in eine dynamisch aufgelöste Grobstruktur ('kohärenter Anteil')  $\mathbf{u}_{\text{koh}}$  und einen zu modellierenden stochastischen ('inkohärenten') Anteil  $\mathbf{u}_{\text{inkoh}}$ ,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}', \quad \text{wobei} \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}_{\text{koh}} + \mathbf{u}_{\text{inkoh}}. \quad (1.1)$$

Für diese Zerlegung wurde die gemittelte Impuls- und Energiebilanz-Gleichung aufgestellt.

Anhand der Geschwindigkeitszerlegung (1.1) lassen sich grob drei Ansätze für eine universelle Charakterisierung der Turbulenz unterscheiden:

- 1.) Statistische Schließung für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $\mathbf{u}'$ ,
- 2.) Theorie der dynamischen Systeme für die Grobstruktur-Dynamik von  $\mathbf{u}_{\text{koh}}$  und
- 3.) asymptotische Theorie für die Statistik der Feinstruktur  $\mathbf{u}_{\text{inkoh}}$ .

Die stochastischen Schließungen beruhen auf charakteristischen Funktionalen für die Wahrscheinlichkeitsdichte der abhängigen Variablen. Sie verwandeln die zeitabhängige Navier-Stokes-Gleichung in eine zeitunabhängige Gleichung für das Funktional. So hat Hopf (1951, [40]) eine Fixpunkt-Gleichung für ein charakteristisches Funktional aufgestellt, aus dem sich prinzipiell alle  $N$ -Punkt-Korrelationen bestimmen lassen. Die numerische Lösung dieser Funktionalgleichung ist jedoch um viele Größenordnungen aufwendiger als die direkte numerische Simulation und daher langfristig kein praktikabler Weg [59, 65]. Ab 1941 wurden in [62] und weiteren Arbeiten verschiedene mathematische und physikalische Näherungen des Ansatzes mit charakteristischen Funktionalen vorgeschlagen. Die niedrigsten Entwicklungsordnungen führen jedoch zu großen Systemen von Differenzialgleichungen, die nur für einfachste Konfigurationen numerisch bewältigbar sind. Für die ingenieurtechnische Praxis dürften diese Methoden auf lange Zeit nicht anwendbar sein.

Der zweite Weg geht ebenfalls auf Reynolds (1883, [100]) zurück. Er hat die nach ihm benannte Zahl als Ordnungsparameter zur Bestimmung des laminar-turbulenten Umschlags der Rohrströmung identifiziert. Die Reynolds-Zahl führt zwei Welten sukzessive ineinander über: die laminare niederdimensionale und die turbulente hochdimensionale. Bei hinreichend niedriger Reynolds-Zahl ist die Strömung stationär und wird mit zunehmender Reynolds-Zahl durch Instabilitäten komplexer bis ein turbulenter Zustand erreicht wird. Eine überraschende Beobachtung ist, dass viele turbulente Scherströmungen durch Grobstrukturen charakterisiert werden, welche sich schon als erste Instabilitäten der stationären Navier-Stokes-Lösung formieren. Beispiele sind die von Kármán'sche Wirbelstraße, die Kelvin-Helmholtz-Wirbel und die Ringwirbel der Taylor-Couette-Strömung. Für den periodischen Zustand nach dem weichen Einsetzen einer oszillatorischen Instabilität, d.h. nach der ersten superkritischen Hopf-Bifurkation, hat Stuart (1958, [119]) ein Mean-Field-Modell entwickelt, welches für eine Reihe von Innenströmungen und jüngst auch für freie Scherströmungen [80] erfolgreich angewendet wurde. Im Landau-Hopf-Szenario [39, 50] wird das Stuart-Modell in wesentlichen Teilen antizipiert und für höhere Reynolds-Zahlen vermutet, dass sich der turbulente Zustand als Folge unendlich vieler Hopf-Bifurkationen einstellt. Mit jeder Hopf-Bifurkation wird eine weitere Frequenz und damit ein neuer Freiheitsgrad in die quasi-periodische Strömung eingeführt bis ein hochdimensionaler Attraktor die Turbulenz charakterisiert. Ruelle & Takens (1971, [107]) haben jedoch gezeigt, dass dieses Szenario unwahrscheinlich ist und sich 'sehr wahrscheinlich' nach der 3. Hopf-Bifurkation ein seltsamer Attraktor einstellt. In einer späteren Arbeit [72] wurde auf die Möglichkeit eines seltsamen Attraktors schon nach der 2. Hopf-Bifurkation hingewiesen. Diese Möglichkeiten werden unter dem Namen Ruelle-Takens-Newhouse-Szenario zusammengefasst. Basierend auf schwach nichtlinearen Entwicklungen der Floquet-Theorie (siehe z.B. [51]) kann die periodische

Strömung auch in einem Periodenverdopplungs-Szenario [23] und in einem Intermittenz-Szenario [92] instabil werden. Auch Intermittenz- und Periodenverdopplungs-Szenario führen wie das sog. Ruelle-Takens-Newhouse-Szenario zu einem seltsamen Attraktor. Die in den 80er Jahren mit der Chaostheorie aufkeimende Hoffnung, dass die Turbulenz irgendwann im mathematisch strengen Sinne durch niederdimensionale seltsame Attraktoren beschrieben werden kann, hat sich bald zerschlagen [108, 109]. Wohl aber wurden Hopf-Bifurkationen, das Periodenverdopplungs- und das Intermittenz-Szenario in verschiedenen Experimenten und Simulationen gefunden (siehe z.B. [114]).

Das Turbulenzproblem wurde durch die Methoden der nichtlinearen Dynamik nicht gelöst. Jedoch wurde die Grundidee einer niederdimensionalen Dynamik durch entsprechende Grobstruktur-Darstellungen für viele Konfigurationen realisiert. Ein Lagrange'scher Weg führt über die Diskretisierung der Wirbelstärke in der augenfälligen Scherschicht und den Einzelwirbeln (siehe z.B. [14, 18]). Ein Eulerscher Weg führt über die Entwicklung der kohärenten Strömungsfuktuation nach einer Anzahl  $N$  von ortsabhängigen globalen Moden  $\mathbf{u}_i(\mathbf{x})$  und zeitabhängigen Fourier-Koeffizienten  $a_i(t)$ ,

$$\mathbf{u}_{\text{koh}} = \sum_{i=1}^N a_i(t) \mathbf{u}_i(\mathbf{x}). \quad (1.2)$$

Im Rahmen der Galerkin-Projektion wird ein dynamisches System für den Phasenraum  $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_N)$  aus der Navier-Stokes-Gleichung hergeleitet,

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{a}). \quad (1.3)$$

Die Konstruktion von niederdimensionalen Darstellungen (1.2) aus mathematischen Überlegungen oder aus physikalischen Eigenwertproblemen ist analytisch bzw. numerisch sehr aufwendig und zur Zeit meist nur für geometrisch einfache Konfigurationen durchführbar. Als Alternative hat sich die Karhunen-Loève-Zerlegung als einfache empirische Postprocessing-Variante von Strömungsdaten bewährt [38]. Die Wirkung der im inkohärenten Anteil  $\mathbf{u}_{\text{inkoh}}$  vernachlässigten Moden auf die Grobstrukturen muss im Galerkin-System (1.3) modelliert werden. Dieser Weg über die Karhunen-Loève-Zerlegung ist auch für komplexe Geometrien durchführbar und soll in vorliegender Arbeit verfolgt werden.

Der dritte Weg der Turbulenz-Beschreibung konzentriert sich auf universelle asymptotische Eigenschaften der kleinskaligen Fluktuationen und fasst die Wirkung der problemabhängigen Grobstrukturen durch einen oder mehrere Ordnungsparameter, z.B. die Dissipation, zusammen. Nachdem Richardson (1922, [103]) qualitativ die Turbulenz als Zerfallsprozess in immer kleinere Wirbel beschrieben hatte, wurden von Kolmogorov 1941 in seinen legendären Arbeiten [47, 48] die

Grundlagen für die quantitative Beschreibung der Richardson-Kaskade gelegt. In der Folgezeit wurde eine Vielzahl von Modifikationen und Ergänzungen dieser Asymptotik vorgeschlagen (siehe z.B. [28]). Die ursprünglich auf Dimensionsüberlegungen beruhende Asymptotik wurde verfeinert mit Methoden der Renormalisierungs-Gruppen (siehe z.B. [59]) und der Lie-Gruppen [85].

Die Ansätze der nichtlinearen Dynamik und der asymptotischen Turbulenztheorien ergänzen sich. Bei dem ersten Ansatz wird eine globale zeitauflösende Beschreibung der Grobstruktur des gesamten Gebietes angestrebt und die Wirkung der Turbulenz-Kaskade modelliert. Bei letzterem wird eine lokale statistische Charakterisierung turbulenter Feinstrukturen verfolgt, wobei die Ordnungsparameter dieser Kaskade von den Grobstrukturen aufgeprägt werden. Trotz augenfälliger Komplementarität beider Ansätze ist eine mathematische und physikalische Verschmelzung bisher nur ansatzweise gelungen. Die Hauptschwierigkeit liegt darin, dass der Übergang von einer Grobstruktur- in eine Feinstruktur-Kaskade kontinuierlich ohne Skalentrennung erfolgt. Es gibt keine praktikablen mathematischen Methoden, die gleichzeitig diesen kontinuierlichen Übergang von globaler zeitabhängiger Dynamik in eine lokale statistische Asymptotik bewerkstelligen [75].

## 1.2 Strömungsbeeinflussung für Verkehrssysteme

Dem unbefriedigenden Stand der Turbulenzmodellierung stehen die Erfolge und die fortwährenden fluiddynamischen Verbesserungen von Verkehrsträgern und Strömungsmaschinen entgegen. Beispiele sind die Erhöhung des Auftriebs bei Flugzeugen und Helikopterflügeln, die Verringerung des Luftwiderstands sowie die Reduktion des Lärms bei allen Verkehrsträgern. Weitere Beispiele sind die Verbesserung der Mischung bei Verbrennungsprozessen in Triebwerken und Motoren sowie bei verfahrenstechnischen Anwendungen.

Die zugrunde liegende Physik beruht meist auf einer Veränderung der Scherschicht-Turbulenz [24]. Die Auftriebserhöhung eines Tragflügels wird durch eine Verhinderung vorzeitiger Ablösung erreicht. Dies geschieht durch eine verbesserte Vermischung von energiereicher Außenströmung mit energiearmen Fluid im wandnahen Bereich. Bei der modernen Boeing 737 sieht man auf der Tragflügeloberseite Winglets zu diesem Zweck. Durch diese Maßnahme wird auch der Druckwiderstand verringert. In Brennkammern wird eine effektive Vermischung von anströmendem, treibstoffgeladenem Fluid mit dem reagierenden, heißen Totwasserfluid angestrebt. Zur Verringerung des Triebwerklärms wird die Scherschicht-Mischung durch Blütenmischer geändert.

Die gewünschte Manipulation der Scherschicht-Turbulenz wird zunächst durch eine gute aero-

dynamische Formgebung erzielt. Weitere Verbesserungen werden angestrebt mit passiven Beeinflussungsmethoden in Form von kleinen Änderungen dieser Formgebung, z.B. Riblets zur Reduktion der Wandschubspannung oder Turbulatoren zur Energetisierung der Grenzschicht. Sowohl aerodynamisches Design als auch passive Beeinflussungsmethoden werden seit gut 100 Jahren mit Erfolg angewendet.

Im Gegensatz zu passiven Maßnahmen wird der Strömung bei aktiven Methoden Energie zugeführt, z.B. über einen akustischen Aktuator. Mittlerweile wird in Industrie und Forschung den aktiven Methoden mehr Gewicht zur Strömungsbeeinflussung gegeben. Ein Grund liegt in der steigenden Zuverlässigkeit und den sinkenden Kosten von Aktuatoren und Sensoren. Ein zweiter Grund ist ein Paradigmenwechsel in der Industrie, wonach aktive Kontrolle nicht mehr als Korrektur einer unprofessionellen Formgebung gesehen wird, sondern als zuweilen wichtigste Möglichkeit einer signifikanten Leistungsverbesserung unter den gegebenen Randbedingungen.

Die aktiven Methoden können als Verallgemeinerung der passiven Verfahren gesehen werden, da die Wirkung der letzteren auch durch stationäres Saugen oder Blasen nachgebildet werden kann. Darüber hinaus haben aktive Verfahren den Vorteil instationär wirken zu können. Dieser Vorteil wird durch Energiezufuhr, meist höhere Kosten und eine höhere Fehleranfälligkeit erkaufte. Daher wird aktive Kontrolle tendenziell nur verwendet in unkritischen Bedingungen, z.B. der Schalldämpfungen im Auto, oder in kurzen off-design Situationen, z.B. dem Thrust-Vectoring bei aggressiven Düsenjäger-Manövern.

Im einfachsten Fall der aktiven Strömungsbeeinflussung, der *Steuerung*, wird die Aktuation nicht mit dem Strömungszustand rückgekoppelt, zum Beispiel bei einem akustischen Aktuator mit vorbestimmter Frequenz und Amplitude. Jedoch lassen sich nach jüngeren Ergebnissen [29] gerade durch die Rückkopplung mit Sensorinformationen, der *Regelung*, signifikante Strömungsverbesserungen erzielen. Dies ist nicht überraschend, da die Steuerung ein trivialer Spezialfall der Regelung ist.

Die effiziente Kopplung zwischen Sensorinformation und Aktuation in der experimentellen Strömungsregelung kann im Regelfall nicht durch Versuch und Irrtum gefunden werden, sondern beruht auf Modellen der Dynamik. Diese Modelle müssen einerseits die Wirkung der Aktuation auf die Sensoren mittels der Grobstrukturen mit ausreichender Genauigkeit auflösen. Andererseits sollen die Modelle einfach genug sein, um online-fähig implementiert werden zu können. Diese Anforderungen werden durch gängige Navier-Stokes-basierte Simulationen, wie die direkte numerische Simulation (DNS), die Large-Eddy-Simulation (LES) oder die instationären Reynolds-

gemittelten Lösungen (uRANS) nicht erfüllt, unter anderem weil der Rechenbedarf viel zu hoch ist. In der Praxis kommen meist Black-Box-Modelle aus experimentellen Daten zum Einsatz [7]. Diese Verfahren basieren auf einem angenommenen linearen Ein-/Ausgangsverhalten und etablieren sich seit einer Dekade in der Praxis durch Leistungsverbesserungen gegenüber Steuerungen. Sie sind jedoch per datenbasierter Konstruktion an die Konfiguration geknüpft und beschreiben nicht die Strömungsverhältnisse.

### 1.3 Niederdimensionale Modellierung

Die niederdimensionale Strömungsmodellierung wird sowohl vom Blickwinkel der Theoriebildung als auch vom Interesse der Strömungsregelung verfolgt. Im Rahmen der Theorie dynamischer Systeme ist die Niederdimensionalität des Systems Prüfstein des gewonnenen Verständnisses der Schlüsselprozesse [64]. Im Rahmen der Regelungstechnik ist die Niederdimensionalität Voraussetzung für die Anwendung vieler regelungstechnischer Verfahren. Die untersuchten dynamischen Systeme ähneln sich dabei in ihrer Form (siehe Tab. 1.1). Bei der Theorie dynamischer Systeme werden die Änderungen mit der Reynolds-Zahl untersucht. In der Regelungstechnik wird die Dynamik durch Aktuation  $\mathbf{G}$  mit zielführenden Regelungsgesetz geändert. Diese Analogie

**Tabelle. 1.1:** *Analogie zwischen ausgewählten Aufgabenstellungen der Theorie dynamischer Systeme und der Regelungstechnik.*

Theorie	System	Ziel
Theorie dynamischer Systeme	$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{a}, Re)$	Beschreibung der Dynamik in Abhängigkeit von $Re$ .
Regelungstechnik	$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{G})$	Veränderung der Dynamik mit dem Regelungsgesetz $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{a}, t)$

findet praktische Anwendung in der Modellkalibration. So werden beispielsweise Parameter von Strömungsmodellen als quasi-stationäre Aktuation  $\mathbf{G}$  betrachtet und mit Methoden der Optimalsteuerung [31, 90] so eingestellt, dass das reduzierte Modell möglichst genau die Navier-Stokes-Simulation wieder gibt.

Im Rahmen der modellbasierten Strömungsregelung werden als online-fähiger Kompromiss zwischen Navier-Stokes-basierten Simulationen und den empirischen Black-Box-Modellen zuneh-

ment niederdimensionale Modelle entwickelt, welche einerseits jene für die Aktuation und Sensorik wichtigen Grobstrukturen auflösen und andererseits einfach genug für eine Reglersynthese sind. Diese dynamischen Systeme werden meist in Form eines empirischen Galerkin-artigen Modells basierend auf der Karhunen-Loève-Zerlegung gesucht [57, 94]. Wirbelverfahren sind ungeeignet für regelungstechnische Methoden, da letztere meist auf einer kontinuierlichen Dynamik in einem vorgegebenen Phasenraum beruhen und da sich bei Wirbelverfahren dieser Phasenraum mit jedem eingespeisten oder entfernten Wirbel unstetig ändert [87].

Die empirischen Galerkin-Verfahren beruhen — wie die Black-Box-Modelle — auf Strömungsdaten einer ganz bestimmten Konfiguration und können für andere Konfigurationen nicht eingesetzt werden. Dafür gewinnt man physikalische Einsichten, wie Aktuatoren und Sensoren über die Grobstrukturen kommunizieren. Dieses physikalische Verständnis kann konzeptionell auf andere Konfigurationen übertragen werden. In Einzelfällen hat das durch die niederdimensionale Modellierung gewonnene Verständnis auch zu Patentideen geführt [71]. Desweiteren arbeitet der Sfb 557 an der TU Berlin und andere Gruppen an Möglichkeiten, die Karhunen-Loève-Moden durch geeignete Eigenmoden aus linearisierten Navier-Stokes-Gleichungen zu ersetzen. Beispiele sind die globale Stabilitätsanalyse [68] und die Balanced Truncation [121]. Hierbei werden die niederdimensionalen Phasenräume a priori, d.h. ohne Kenntnis der Strömungseigenschaften, berechnet.

Die niederdimensionalen Modelle ergänzen die Navier-Stokes-basierten Rechenverfahren der numerischen Strömungsmechanik in einer für die Strömungsbeeinflussung sehr nützlichen Weise. Im Vergleich mit den uRANS der numerischen Strömungsmechanik leisten die niederdimensionalen Modelle eine bessere Auflösung der Aktuationseffekte mit einem Bruchteil des Rechenaufwandes. Dafür müssen diese Modelle zur Sicherstellung einer gegebenen quantitativen Genauigkeit immer in irgendeiner Form an die Zielkonfiguration angepasst werden. Mit einem kalibrierten Modell sind die Optimierung von Sensorpositionen und Reglersynthesen leicht durchführbar, für die hochdimensionalen Navier-Stokes-Diskretisierung hingegen kaum. Als qualitative Modelle ermöglichen sie ein physikalisches Verständnis der Schlüsselprozesse, eine schnelle Exploration von Strömungszuständen und schnelle Trenderaussagen bezüglich der Aktuation.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit soll ein systematischer Weg zu empirischen Galerkin-Modellen für die Strömungsregelung aufgezeigt werden und bisher offen gebliebene Fragen zur Rolle des Druckterms und zur realistischen Darstellung der Transienten konstruktiv durch Neuerungen geklärt werden.

## 2. Einführung in das Galerkin-Verfahren

Eine Vielzahl niederdimensionaler Strömungsmodelle basiert auf dem empirischen Galerkin-Verfahren. Bei diesem Verfahren wird auf numerische oder experimentelle Daten zurückgegriffen, um die Strömung mit einer Karhunen-Loève-Zerlegung möglichst niederdimensional darzustellen. In §2.1 wird die empirische Variante des Galerkin-Verfahrens als Spezialfall der Methoden der numerischen Strömungsmechanik vorgestellt. Die Vorteile und Herausforderungen dieses Verfahrens zeigen sich schon an einfachen Beispielen und werden an einer gewöhnlichen und einer partiellen Differenzialgleichung in §2.2 und §2.3 respektive aufgezeigt. Die Berechnung und die Eigenschaften der Karhunen-Loève-Zerlegung für Strömungsdaten werden im Anhang (§A) rekapituliert.

### 2.1 Petrov-Galerkin-Verfahren

Im vorliegenden Abschnitt soll das empirische Galerkin-Verfahren von anderen Varianten abgegrenzt werden.

In Anlehnung an [97] betrachten wir ein Anfangs-Randwert-Problem (ARWP) der Form

$$\mathcal{N}[u] = 0, \tag{2.1a}$$

$$\mathcal{A}[u] = 0, \tag{2.1b}$$

$$\mathcal{R}[u] = 0, \tag{2.1c}$$

wobei  $u(x, t)$  eine von dem Ort  $x$  und der Zeit  $t$  abhängige Zustandsvariable und  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{R}$  Operatoren für die Differenzialgleichung, die Anfangsbedingung und die Randbedingung, respektive, darstellen. Als konkretes Beispiel soll die eindimensionale, lineare Konvektionsgleichung auf dem Gebiet  $\Omega = [0, 2\pi]$  dienen,

$$\mathcal{N}[u] := \partial_t u + \partial_x u = 0, \tag{2.2a}$$

$$\mathcal{A}[u] := u(x, 0) - \cos x = 0, \tag{2.2b}$$

$$\mathcal{R}[u] := u(0, t) - u(2\pi, t) = 0. \tag{2.2c}$$

Ein allgemeiner Ansatz zur Lösung des ARWP besteht in der endlichen Entwicklung in ortsabhängige Moden  $u_i$  und zeitabhängigen Fourier-Koeffizienten  $a_i$ ,

$$u(x, t) \approx u^{[N]}(x, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) u_i(x). \quad (2.3)$$

Die Entwicklung wird als *Galerkin-Approximation* bezeichnet und der Name *Fourier-Koeffizienten* aus der mathematischen Literatur [49] soll auf die vorgenommene Verallgemeinerung der Fourier-Reihen hinweisen. Ein solcher Ansatz konvergiert im Limes  $N \rightarrow \infty$  gegen die Lösung. Die endliche Galerkin-Approximation erfüllt jedoch im Regelfall das ARWP (2.1) nicht exakt, sondern ist mit von Null verschiedenen Residuen verbunden:

$$R_{\mathcal{N}} := \mathcal{N} [u^{[N]}], \quad (2.4a)$$

$$R_{\mathcal{A}} := \mathcal{A} [u^{[N]}], \quad (2.4b)$$

$$R_{\mathcal{R}} := \mathcal{R} [u^{[N]}]. \quad (2.4c)$$

Ein reellwertiges Maß für die Abweichung des Ansatzes lässt sich aus dem inneren Produkt eines geeigneten Funktionenraums ableiten. Seien  $u, v$  Elemente des Hilbert-Raums  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  der quadratisch integrierbaren Funktionen auf dem Gebiet  $\Omega$ , dann ist deren inneres Produkt im eindimensionalen Fall definiert durch

$$(u, v)_{\Omega} := \int_{\Omega} dx u v. \quad (2.5)$$

Die zugehörige Norm von  $u$  lautet

$$\|u\|_{\Omega} := \sqrt{(u, u)_{\Omega}}. \quad (2.6)$$

Collatz [15] klassifiziert die Lösungen vom ARWP in drei Arten. Bei den *Rand-Verfahren* wird dafür Sorge getragen, dass die Differenzialgleichung exakt erfüllt ist,  $R_{\mathcal{N}} \equiv 0$ . Ein Beispiel ist das Panelverfahren als oft gebrauchtes potenzialtheoretisches Auslegungsverfahren in der Aerodynamik. Bei dem Panelverfahren können  $,u_i'$  Stromfunktionen von Quellen und  $,a_i'$  Quellstärken sein, sodass Gl. (2.3) nach dem Superpositionsprinzip die Laplace-Gleichung exakt erfüllt. Die zweite Kategorie sind *innere Verfahren*, bei denen die Randbedingungen exakt erfüllt sind,  $R_{\mathcal{R}} \equiv 0$ . Hierzu zählt die im Folgenden detaillierter beschriebene traditionelle Galerkin-Methode [30]. Wenn weder die Differenzialgleichung noch die Randbedingung exakt erfüllt sind, liegt ein *gemischtes Verfahren* vor.

Im Folgenden wird von einem inneren Verfahren ausgegangen, d.h. die Randbedingungen sind bei der Galerkin-Approximation (2.3) für beliebige Fourier-Koeffizienten  $a_i$  exakt erfüllt. In diesem Fall gilt es,  $N$  Gleichungen für die Dynamik der Fourier-Koeffizienten abzuleiten. Bei dem allgemeinen *Petrov-Galerkin-Verfahren* (siehe z.B. [25]) werden diese  $N$  Gleichungen durch die *Galerkin-Projektion* des Differenzialgleichungs-Residuums auf  $N$  Testfunktionen  $v_i$  erzeugt,

$$(v_i, R_{\mathcal{N}} [u^{[N]}])_{\Omega} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.7)$$

Diese Projektion führt bei zeitinvarianten parabolischen Differenzialgleichungen mit erster Ableitung in der Zeit zu einem gewöhnlichen Differenzialgleichungs-System der Form

$$\dot{a}_i = f_i(a_1, a_2, \dots, a_N), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.8)$$

Diese Bewegungsgleichung wird im Folgenden als *Galerkin-System* bezeichnet. Die Anfangsbedingung zur Zeit  $t = 0$  wird durch eine analoge Projektion abgeleitet,

$$(v_i, R_{\mathcal{A}} [u^{[N]}])_{\Omega} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.9)$$

Die Galerkin-Lösung des ARWP wird durch die Galerkin-Approximation (2.3) und die Lösung des Galerkin-Systems (2.8) mit der Anfangsbedingung (2.9) vermittelt. Bei der Entwicklung des Galerkin-Verfahrens hat man bei den Entwicklungsmoden  $u_i$  und den Testfunktionen  $v_i$  eine große Wahlfreiheit. De facto lassen sich die meisten gängigen gitterbasierten Diskretisierungsmethoden als Petrov-Galerkin-Verfahren formulieren, wie Fletcher [25] für das Finite-Differenzen-, das Finite-Volumen- und das Finite-Elemente-Verfahren zeigt. Diesen Diskretisierungen ist gemein, dass die Moden nur auf einem oder wenigen Gitterelementen definiert sind und außerhalb identisch verschwinden.

Bei den *traditionellen* Galerkin-Verfahren wird nach [25] gefordert, dass die Test- und Entwicklungsfunktionen identisch sind,  $v_i = u_i$  und dass die Moden  $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$  ein vollständiges orthonormales Funktionensystem bilden. Diese Einschränkung beinhaltet

$$(u_i, u_j)_{\Omega} = \delta_{ij}, \quad i, j \geq 1, \quad (2.10)$$

und die Konvergenz der Galerkin-Approximation  $u^{[N]}$  gegen jedes Element  $u$  des Funktionsraums,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u - u^{[N]}\|_{\Omega} = 0. \quad (2.11)$$

Im Regelfall<sup>1</sup> bedingt Gl. (2.10) eine Ausdehnung von stetigen Moden auf das ganze Gebiet  $\Omega$ . Die Überlappung aller Moden im gesamten Ortsbereich macht das traditionelle Galerkin-Verfahren

---

<sup>1</sup>Die Moden verschwinden nur auf Nullmengen.

bei großer Modenanzahl meist rechenaufwendig, jedoch können bei den angestrebten niedrigen Dimensionen  $N$  sehr rechenökonomische Modelle entstehen [25].

Die Forderungen des traditionellen Galerkin-Verfahrens schließen die gitterbasierten Diskretisierungen aus, enthalten jedoch noch ein reichhaltiges Spektrum von Ansätzen, die sich in der Bestimmung der Moden  $u_i$  unterscheiden.

- Bei der *mathematischen* Variante wird das Modensystem aus funktionalanalytischen Vollständigkeitsüberlegungen hergeleitet. Hierzu gehören Spektralverfahren basierend auf Fourier-Zerlegungen oder Tschebyscheff-Polynomen (siehe z.B. [91]). Weitere Funktionensysteme werden durch Wavelets vermittelt [22]. Diese mathematischen Galerkin-Approximationen ermöglichen sehr effektive Verfahren für Konfigurationen mit hoher Symmetrie, z.B. der Kanalströmung, der Taylor-Couette-Strömung oder der Kugelspaltströmung. Für komplexe Konfigurationen ist dieser Weg sehr anspruchsvoll und kaum begangen.
- Ausgangspunkt von *physikalischen* Verfahren ist die Feststellung, dass bei den mathematischen Galerkin-Approximationen keine Eigenschaften der Navier-Stokes-Gleichung eingehen. In der Hoffnung auf niederdimensionalere Darstellungen wird eine Entwicklung nach Eigenmoden einer Linearisierung der Navier-Stokes-Gleichung vorgenommen. Beispiele sind Stokes-Moden [110], singuläre Stokes-Moden aus einer modifizierten Stokes-Gleichung [6], oder Stabilitätsmoden der um die stationäre Lösung linearisierten Navier-Stokes-Gleichung [1]. Die numerische Berechnung der Eigenmoden ist sehr aufwendig und bislang nur für geometrisch einfache oder nominal zweidimensionale Strömungen vorgenommen worden. Desweiteren ist die Vollständigkeit der Eigenmoden-Systeme nur für wenige geometrisch einfache Konfigurationen gezeigt [36, 110]. Auch die physikalischen Galerkin-Verfahren scheinen für die Entwicklung niederdimensionaler Modelle für komplexe Konfigurationen kaum durchführbar.
- Die *empirischen* Verfahren basieren auf Daten oder Eigenschaften der zu approximierenden Navier-Stokes-Lösung. Typischerweise werden Strömungsdaten durch eine Karhunen-Loève-Zerlegung niederdimensional dargestellt. Dieser Ansatz kann für beliebig komplexe Konfigurationen verfolgt werden und hat viel niedrigere Dimensionen als die beiden oben genannten Methoden, bedingt aber zwangsläufig eine geringe dynamische Bandbreite der Lösung.

Der Schwerpunkt vorliegender Arbeit liegt in der Weiterentwicklung empirischer Galerkin-Verfahren, da eine allgemeine Methodologie für Strömungen von ingenieurtechnischen Interesse angestrebt wird. Gegenwärtige Projekte des Autors beinhalten die modellbasierte Beeinflussung von Strömungen um Automobile, von Hochauftriebsflügeln und von Düsentriebwerken.

## 2.2 Beispiel eines gewöhnlichen Differenzialgleichungs-Systems

Im Folgenden wird das empirische Galerkin-Verfahren auf ein gewöhnliches Differenzialgleichungs-System mit drei Freiheitsgraden angewandt. Besonderes Augenmerk gilt dem Unterschied zwischen dem ursprünglichen und dem reduzierten, dynamischen System.

### 2.2.1 Differenzialgleichungs-System

Wir betrachten ein gewöhnliches Differenzialgleichungs-System von der Form (2.8):

$$\dot{u} = f_1(u, v, w) = (\mu - w)u - v, \quad (2.12a)$$

$$\dot{v} = f_2(u, v, w) = (\mu - w)v + u, \quad (2.12b)$$

$$\dot{w} = f_3(u, v, w) = -w + u^2 + v^2, \quad (2.12c)$$

wobei  $\mu > 0$  ist. Gelegentlich werden der Zustand und dessen Ableitung als Vektoren zusammengefasst,  $\mathbf{u} := (u, v, w)$  und  $\mathbf{f} := (f_1, f_2, f_3)$ .

Gleichung (2.12) hat die instabile stationäre Lösung

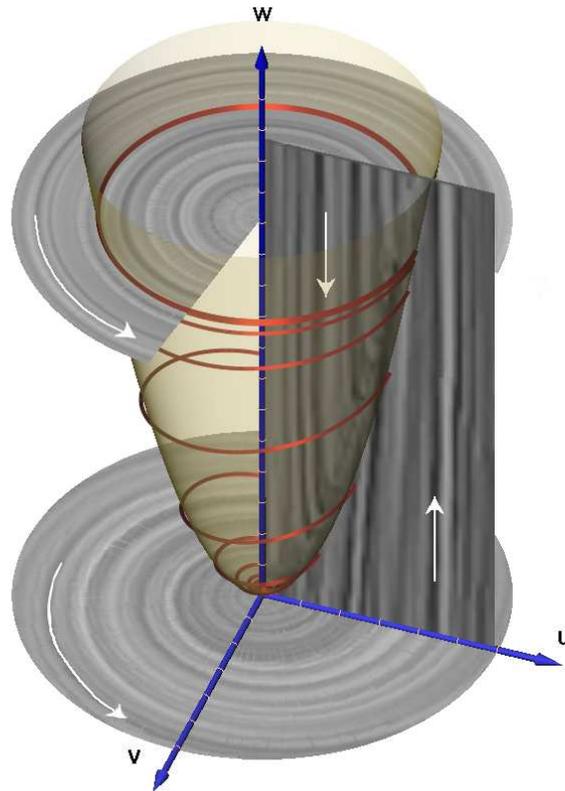
$$u_s = v_s = w_s = 0 \quad (2.13)$$

und einen Grenzyklus als global stabilen Attraktor:

$$u_p = \sqrt{\mu} \cos(t - t_0), \quad v_p = \sqrt{\mu} \sin(t - t_0), \quad w_p = \mu, \quad (2.14)$$

wobei  $t_0$  eine beliebig wählbare Phase darstellt. Abbildung 2.1 zeigt ein Phasenportrait von Gl. (2.12).

Dieses System basiert auf einer Zentralmannigfaltigkeits-Approximation eines mathematischen Galerkin-Modells der periodischen Zylinderumströmung [17]. Es besitzt daher nicht zufällig viele



**Abbildung. 2.1:** *Phasen-Portrait von Gl. (2.12) — gestreckt in der  $w$ -Komponente. In den dargestellten Ebenen werden die Integrallinien der tangentialen Flusskomponente visualisiert. Die untere (obere) horizontale Ebene enthält den instabilen Fixpunkt (stabilen Grenzzyklus). Die Halbebene  $v = 0$  visualisiert das Einschwingen auf den Mean-Field-Paraboloid  $w = u^2 + v^2$  (halbtransparente Fläche). Die rote Kurve auf dem Mean-Field-Paraboloid beschreibt einen Einschwingvorgang vom Fixpunkt (2.13) auf den Grenzzyklus (2.14).*

Eigenschaften von selbstangefachten, amplitudenbeschränkten Strömungsinstabilitäten. Hierzu gehören (siehe [80]):

1. nur lineare und quadratische Termen in der Bewegungsgleichung (2.12),
2. ein instabiler Fixpunkt (2.13),
3. ein stabiler Grenzzyklus (2.14),
4. eine Zentralmannigfaltigkeit  $w = u^2 + v^2$  auf denen Trajektorien schnell konvergieren,
5. und die Differenz  $(0, 0, \mu)$  zwischen der stationären und der gemittelten periodischen Lösung.

## 2.2.2 Karhunen-Loève-Zerlegung

Die Karhunen-Loève-Zerlegung [56] charakterisiert und sortiert die energetischen Fluktuationsrichtungen eines Attraktors im Phasenraum. Der Mittelwert  $\mathbf{u}_0 := (u_0, v_0, w_0)$  vom Grenzyklus (2.14) ist gegeben durch

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = \mu. \quad (2.15)$$

Die Autokorrelations-Matrix der Fluktuation  $\mathbf{u}' := (u', v', w')$  lautet

$$\mathbf{R} := \begin{pmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu/2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Durch die Überstreichung wird die Mittelwertbildung über eine Periode dargestellt.

Die Karhunen-Loève-Moden erfüllen die Eigenwert-Gleichung

$$\mathbf{R} \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, \quad (2.17)$$

wobei  $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu/2$  mit  $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0)$ . Der Kern  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$  hat verschwindende Energie  $\lambda_3 = 0$  und wird nicht als Karhunen-Loève-Mode betrachtet.

Die aus der Karhunen-Loève-Zerlegung resultierende Galerkin-Approximation spannt die Ebene des Grenzyklus auf,

$$\mathbf{u}^{[2]} := \mathbf{u}_0 + a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 \quad (2.18)$$

wobei  $a_1 = \sqrt{\mu} \cos(t-t_0)$ ,  $a_2 = \sqrt{\mu} \sin(t-t_0)$ . Diese Approximation löst exakt die Fluktuationsenergie des Grenzyklus auf.

## 2.2.3 Galerkin-Modell

Bei der Entwicklung des Galerkin-Modells folgen wir §2.1. Das Residuum der Differenzialgleichung ist definiert durch  $\mathcal{N}[\mathbf{u}] := \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}(\mathbf{u})$ . Dem inneren Produkt des  $\mathcal{L}^2$  entspricht das Euklidische Produkt. Somit führt die Galerkin-Projektion auf die Karhunen-Loève-Moden zu  $\mathbf{u}_i \cdot \mathcal{N}[\mathbf{u}^{[2]}] = 0$  und damit zu

$$\dot{a}_1 = -a_2, \quad (2.19a)$$

$$\dot{a}_2 = a_1. \quad (2.19b)$$

Dieses System beschreibt ein Zentrum, welches neben dem Grenzyklus (2.14) noch ein Kontinuum von anderen periodischen Lösungen mit gleicher Frequenz aber unterschiedlichen Amplituden beinhaltet.

Als Schlussfolgerungen halten wir fest:

1. Die Karhunen-Loève-Zerlegung (2.18) beschreibt exakt den Grenzyklus. Das zugehörige Galerkin-System (2.19) beherbergt die entsprechenden periodischen Fourier-Koeffizienten.
2. Die Stabilitätseigenschaft des Grenzyklus wird nicht bei der Galerkin-Projektion bewahrt. Aus einer asymptotisch stabilen Lösung wird eine marginal stabile Lösung. Mit anderen Worten, die Dynamik von infinitesimalen Störungen des Attraktors wird nicht richtig aufgelöst.
3. Neben dem Grenzyklus enthält das Galerkin-System noch viele andere unphysikalische Lösungen. Insbesondere entspricht der Fixpunkt des Galerkin-Modells  $(u, v, w) = (0, 0, \mu)$  nicht dem Fixpunkt  $(0, 0, 0)$  des originären Systems.
4. Das Galerkin-System ist strukturell instabil, d.h. kleine Änderungen in dem Galerkin-System führen zu großen Änderungen der Galerkin-Lösung. So führt ein beliebig kleiner Term der Form  $+\epsilon a_1$  in Gl. (2.19a) zur Divergenz für  $\epsilon > 0$ .
5. Die Karhunen-Loève-Zerlegung beschreibt nur den Grenzyklus in der Ebene  $w = \mu$  und keinen Grenzyklus für einen anderen  $\mu$ -Wert. Insbesondere ist der Fixpunkt  $(0, 0, 0)$  nicht in der Galerkin-Approximation (2.18) darstellbar.

Die Herausforderungen 2–4 sind offensichtlich mit der 5. Eigenschaft verbunden, d.h. die Ergänzung der Galerkin-Approximation um die dritte Raumrichtung stellt das originäre System wieder her.

Das Beispielsystem zeigt, warum die Entwicklungen von empirischen Galerkin-Modellen sich schwierig gestalten kann: energetisch vernachlässigbare Phasenraumrichtungen können für die Transientendynamik sehr wichtig sein. Diese Raumrichtungen sind ggf. in der Galerkin-Approximation zu ergänzen.

## 2.3 Beispiel einer partiellen Differentialgleichung

Im Folgenden wird ein empirisches Galerkin-Modell von der Lösung einer partiellen Differentialgleichung entwickelt. An diesem Beispiel werden Eigenschaften der niederdimensionalen Darstellung von der Wirbelstraße und der Kelvin-Helmholtz-Instabilität analytisch herausgearbeitet.

### 2.3.1 Differentialgleichungs-System

Wir betrachten eine Strömung in einem kartesischen Koordinaten-System  $x, y, z$ . Die Grundströmung sei  $(1, 0, 0)$ , wobei im Folgenden von entdimensionalisierten Größen ausgegangen wird. Die Geschwindigkeit werde im halbbunendlichen Gebiet  $x \geq 0$  als Transversalwelle angenommen,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (0, u(x, t), 0). \quad (2.20)$$

Dieser Ansatz führt in der Navier-Stokes-Gleichung zur linearen Konvektion-Diffusions-Gleichung

$$\partial_t u + \partial_x u = \nu \partial_{xx}^2 u, \quad (2.21)$$

wobei  $\nu$  die reziproke Reynolds-Zahl darstellt. Diese partielle Gleichung werde durch eine Randbedingung bei  $x = 0$ ,

$$u(0, t) = \cos t, \quad (2.22)$$

ergänzt. Wir fordern keine Anfangsbedingung, da — wie in §2.2 — die auskonvergierte Lösung beschrieben werden soll.

Die wellenförmige Signatur der transversalen Geschwindigkeitskomponente finden wir in nachfolgenden Kapiteln auch in den Grobstrukturen der von Kármán'schen Wirbelstraße und der Kelvin-Helmholtz-Instabilität. Das Rechenbeispiel soll uns als einfacher analytisch bearbeitbarer Prototyp dieser Strömungszillationen dienen.

Die auskonvergierte Lösung von Gln. (2.21) und (2.22) wird in dem komplexwertigen Lösungsansatz

$$u = e^{\imath(kx - t)}, \quad k = \beta + \imath\alpha$$

unter der Nebenbedingung  $\Re\{u(0, t)\} = \cos t$  gesucht. Hierbei ist  $\imath$  die imaginäre Einheit,  $k$  die komplexe Wellenzahl aus reeller Abklingrate  $\alpha$  und der reellwertigen Wellenzahl  $\beta$ , und  $\Re$  bezeichnet den Realteil. Da die partielle Differentialgleichung linear ist, kann der Imaginärteil

von  $u$  vernachlässigt werden. Der Realteil des Ansatzes ergibt sich nach kurzer Rechnung zu

$$u(x, t) = e^{-\alpha x} \cos(\beta x - t), \quad (2.23a)$$

$$\alpha = \frac{1}{4\nu} \left[ \sqrt{2 + 2\sqrt{1 + 16\nu^2}} - 2 \right], \quad (2.23b)$$

$$\beta = \frac{1}{4\nu} \left[ \sqrt{-2 + 2\sqrt{1 + 16\nu^2}} \right]. \quad (2.23c)$$

Die Lösung beschreibt eine exponentiell abklingende Transversalwelle mit konstanter Wellenzahl.

Im Limes kleiner Zähigkeit  $\nu \rightarrow 0$  vereinfacht sich die Abklingrate und Wellenzahl zu

$$\alpha = \nu + O(\nu^3), \quad (2.24a)$$

$$\beta = 1 + O(\nu^2). \quad (2.24b)$$

Die Wellenzahl konvergiert gegen den entsprechenden Wert der Lösung  $u = \cos(x - t)$  von der Konvektionsgleichung  $\partial_t u + \partial_x u = 0$  unter der Randbedingung (2.22).

Die Abklingrate  $\nu$  lässt sich aus einer zeitlichen Approximation der Wellenbewegung ableiten. Für kleine Zähigkeiten  $\nu \ll 1$  ändert sich die Amplitude kaum in  $x$ -Richtung, sodass der lokale Ansatz  $u = A \cos(x - t)$  verwendet werden kann. In einem mitbewegten System  $x' = x - t$  vereinfacht sich Gl. (2.21) zu  $\partial_t u = \nu \partial_{x'}^2 u$  und der Wellenansatz zu  $u = A \cos x'$ . Hieraus folgt  $A \propto e^{-\nu t}$ . Die zeitliche Abklingrate  $\nu$  in einem Bezugssystem mit einer Konvektionsgeschwindigkeit von 1 entspricht der gleichen räumlichen Abklingrate  $\nu$ , wie bereits in Gl. (2.24a) hergeleitet. Die verwendete Umrechnung von räumlicher und zeitlicher Anfachungsrate ist als *Gaster-Transformation* in der Stabilitätstheorie bekannt [32].

### 2.3.2 Karhunen-Loève-Zerlegung

Die Galerkin-Approximation wird im Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  auf dem Gebiet der nichtnegativen reellen Zahlen  $\Omega := \{x: x \geq 0\}$  beschrieben. Das innere Produkt

$$(u, v)_\Omega := \int_0^\infty dx u v, \quad (2.25)$$

ist ein Spezialfall von Gl. (2.5). Wegen des exponentiellen Abklingens der Lösung ist die Norm der Lösung (2.23) endlich.

Die Lösung (2.23) lässt sich darstellen durch

$$u(x, t) = b_1(t) v_1(x) + b_2(t) v_2(x), \quad (2.26)$$

wobei  $v_1 = e^{-\alpha x} \cos(\beta x)$ ,  $v_2 = e^{-\alpha x} \sin(\beta x)$ ,  $b_1 = \cos t$ ,  $b_2 = \sin t$ , d.h. sie befindet sich in einem zweidimensionalen Unterraum des  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ .

Die Autokorrelations-Funktion für  $x, y \geq 0$  misst die Korrelation zwischen den  $u$ -Werten an zwei Orten,

$$R(x, y) := \overline{u(x, t) u(y, t)} = \frac{1}{2} e^{-\alpha(x+y)} \cos(\beta [x - y]). \quad (2.27)$$

Die Karhunen-Loève-Moden  $u_i$  mit Eigenwerten  $\lambda_i$  werden als Eigenfunktionen der Fredholm'schen Gleichung bestimmt. In Analogie zu Gl. (2.17) aus §2.2 lautet die Gleichung

$$\int_0^\infty dy R(x, y) u_i(y) = \lambda_i u_i(x), \quad (2.28)$$

wobei — wie bei dem inneren Produkt — die Matrix-Multiplikation im Euklidischen Raum durch eine Integration im Funktionenraum ersetzt wird. Aus der Symmetrie des Kerns,  $R(x, y) = R(y, x)$  folgt die Orthogonalität der Eigenfunktionen.

Die Karhunen-Loève-Moden bleiben in dem Unterraum aus Gl. (2.26), d.h. sind darstellbar durch

$$u_i(x) = b_{1i} v_1(x) + b_{2i} v_2(x). \quad (2.29)$$

Damit lautet die rechte Seite von Gl. (2.28)

$$\lambda_i u_i(x) = \lambda_i b_{1i} v_1(x) + \lambda_i b_{2i} v_2(x). \quad (2.30)$$

Entsprechend folgt für die linke Seite von Gl. (2.28)

$$\int_0^\infty dy R(x, y) u_i(y) = (R_{11} b_{1i} + R_{12} b_{2i}) v_1(x) + (R_{21} b_{1i} + R_{22} b_{2i}) v_2(x), \quad (2.31)$$

wobei

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} := \frac{1}{8 \alpha (\alpha^2 + \beta^2)} \begin{pmatrix} \beta^2 + 2 \alpha^2 & \alpha \beta \\ \alpha \beta & \beta^2 \end{pmatrix}.$$

Zusammengefasst wird Gl. (2.28) dargestellt durch

$$(R_{11} b_{1i} + R_{12} b_{2i} - \lambda_i b_{1i}) v_1(x) + (R_{21} b_{1i} + R_{22} b_{2i} - \lambda_i b_{2i}) v_2(x) = 0. \quad (2.32)$$

Die Koeffizienten in Gl. (2.32) verschwinden, da  $v_1$  und  $v_2$  linear unabhängige Funktionen sind, und es folgt ein Eigenwert-Problem in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Die Karhunen-Loève-Eigenwerte berechnen sich aus Gl. (2.33) zu

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 \pm \alpha \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{8 \alpha (\alpha^2 + \beta^2)}. \quad (2.34)$$

Die Koeffizienten des Ansatzes der Karhunen-Loève-Moden (2.29) werden mit  $\|u_i\|_{\Omega} = 1$  normiert und betragen

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \frac{\beta}{\sqrt{2\alpha}} \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} & -\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Mit Gl. (2.29) folgt für die Karhunen-Loève-Moden

$$u_1(x) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\beta} e^{-\alpha x} \left[ \beta \cos(\beta x) + \left( -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right) \sin(\beta x) \right], \quad (2.36a)$$

$$u_2(x) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\beta} e^{-\alpha x} \left[ \beta \cos(\beta x) + \left( -\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right) \sin(\beta x) \right]. \quad (2.36b)$$

Die zur Lösung (2.23) gehörigen Fourier-Koeffizienten lauten

$$a_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{4 \sqrt{\alpha} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left[ \left( \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right) \cos t + \beta \sin t \right], \quad (2.37a)$$

$$a_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{4 \sqrt{\alpha} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left[ \left( -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right) \cos t - \beta \sin t \right]. \quad (2.37b)$$

Im Limes kleiner Zähigkeiten vereinfacht sich die Karhunen-Loève-Zerlegung zu

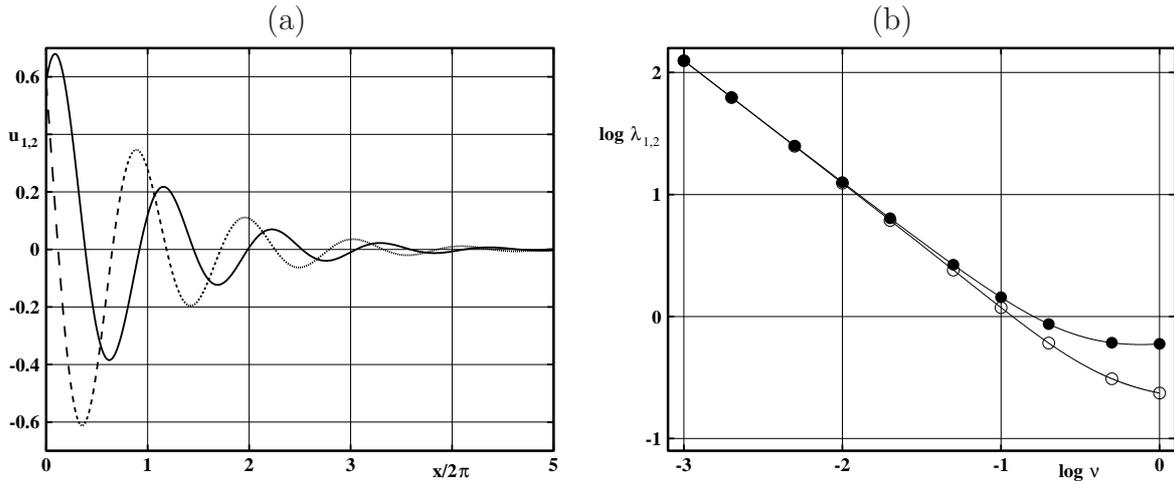
$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \nu + O(\nu^2)}{8\nu}, \quad (2.38a)$$

$$u_{1,2}(x) = \sqrt{\nu} e^{-\nu x} \left[ \cos(x \mp \pi/4) + O(\nu^2) \right], \quad (2.38b)$$

$$a_{1,2}(t) = \frac{1}{4\sqrt{\nu}} \left[ \cos(t \mp \pi/4) + O(\nu^2) \right]. \quad (2.38c)$$

Die Moden  $u_{1,2}$  sind um  $90^\circ$  phasenversetzt, abklingende, laufende Wellen (siehe Abb. 2.2a). Dieser Phasenversatz stellt die Orthogonalität  $(u_1, u_2)_{\Omega} = 0$  sicher. Mit abnehmender Viskosität  $\nu$  wächst die räumliche Ausdehnung der Moden mit  $1/\nu$ . Der zu  $\sqrt{\nu}$  proportionale Vorfaktor folgt somit aus der Normierungsbedingung  $\|u_i\|_{\Omega} = 1$ .

Die Eigenwerte  $\lambda_{1,2}$  charakterisieren den Energiegehalt der Moden  $u_{1,2}$ . Dieser Energiegehalt wird mit abnehmender Viskosität  $\nu$  größer, da die Transversalwelle langsamer abklingt (siehe Abb. 2.2b). Entsprechend wurden in [20] zunehmende Energieniveaus vergleichbarer Moden für die von Kármán'sche Wirbelstraße bei zunehmender Reynolds-Zahl beobachtet. Desweiteren wird der relative Unterschied der Energien in beiden Moden geringer. Bei Modenpaaren, die



**Abbildung. 2.2:** Karhunen-Loève-Zerlegung der Lösung der Konvektion-Diffusions-Gleichung (2.21). (a) Moden  $u_1$  (durchgezogene Linie) und  $u_2$  (gestrichelte Linie) in Abhängigkeit vom Ort  $x$  bei der Viskosität  $\nu = 0.2$ . (b) Eigenwerte  $\lambda_1$  (●) und  $\lambda_2$  (○) in Abhängigkeit von  $\nu$  in doppelt-logarithmischer Auftragung.

eine laufende Welle aufspannen, wurden schon in der Grenzschicht [95] und dem periodischen Kreiszyylinder-Nachlauf [20] ähnliche Energieniveaus gefunden. Interessanterweise ist der relative Unterschied der Energie-Niveaus proportional zur Abklingrate, d.h. steht mit der Veränderung in Strömungsrichtung in Beziehung.

### 2.3.3 Galerkin-Modell

Mit der traditionellen Galerkin-Projektion wird aus Gl. (2.3) ein Galerkin-System abgeleitet. Die Projektion der Zeitableitung führt zu

$$\begin{aligned}
 (u_i, \partial_t u)_\Omega &= (u_i, \partial_t (a_1 u_1 + a_2 u_2))_\Omega && \text{(Galerkin-Entwicklung)} \\
 &= (u_i, \dot{a}_1 u_1 + \dot{a}_2 u_2)_\Omega && \text{(Zeitunabhängigkeit der Moden)} \\
 &= \dot{a}_1 (u_i, u_1)_\Omega + \dot{a}_2 (u_i, u_2)_\Omega && \text{(Bilinearität des inneren Produkts)} \\
 &= \dot{a}_1 \delta_{i1} + \dot{a}_2 \delta_{i2} && \text{(Orthonormalität der Moden)} \\
 &= \dot{a}_i && \text{(Eigenschaft des Kronecker-Symbols).}
 \end{aligned}$$

Analog ergibt sich für die Projektion des Konvektivterms

$$(u_i, -\partial_x [a_1 u_1 + a_2 u_2])_\Omega = c_{i1} a_1 + c_{i2} a_2, \quad i = 1, 2, \quad (2.39)$$

wobei

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha & \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} & \alpha \end{pmatrix}.$$

Die Projektion des Zähigkeitsterms führt zu einem weiteren linearen Term,

$$(u_i, \partial_{xx}^2 [a_1 u_1 + a_2 u_2])_{\Omega} = d_{i1} a_1 + d_{i2} a_2, \quad i = 1, 2, \quad (2.40)$$

wobei

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha^2 - \beta^2 & \alpha^2 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \alpha^2 - 2\alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} & \alpha^2 - \beta^2 \end{pmatrix}.$$

Zusammengefasst ergibt sich das Galerkin-System

$$\dot{a}_i = \sum_{j=1}^2 l_{ij} a_j, \quad (2.41)$$

wobei

$$\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_{11} + \nu d_{11} & c_{12} + \nu d_{12} \\ c_{21} + \nu d_{21} & c_{22} + \nu d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} + \nu d_{12} \\ c_{21} + \nu d_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses Galerkin-System beherbergt die Fourier-Koeffizienten (2.37) der Lösung. Dies folgt — wie in §2.2 — aus der Tatsache, dass mit der Entwicklung (2.3) eine exakte Lösungsdarstellung vorliegt und somit das Galerkin-System exakt erfüllt wird. Die ‚Unwucht‘  $l_{12}/l_{21} = -\lambda_1/\lambda_2$  erlaubt die unterschiedlichen Amplituden der Koeffizienten  $a_i$ . Im Limes kleiner Zähigkeiten konvergieren  $l_{12} \rightarrow 1$  und  $l_{21} \rightarrow -1$ .

Das Galerkin-System beinhaltet neben der Lösung des Randwert-Problems noch weitere Lösungen mit anderen Phasen und anderen Amplituden, d.h. Lösungen, die anderen periodischen Randbedingungen als Gl. (2.22) genügen. Dieses ist eine allgemeine Eigenschaft von empirischen Galerkin-Modellen in endlichen Gebieten [97].

# 3. Niederdimensionale Galerkin-Modellierung

Die empirische Galerkin-Methode (§3.1) wird ergänzt durch eine analytisch ableitbare Druckterm-Darstellung (§3.2) und eine Verallgemeinerung der Galerkin-Approximation für Transienten (§3.3). Diese Neuerungen tragen entscheidend zu einer quantitativ befriedigenden Modellierung von einschwingenden und eingeschwungenen Scherströmungen bei, ohne dass auf empirisch motivierte Zusatzterme zurückgegriffen werden muss. In §3.4 wird mit einer vollständigen modalen Energiefluss-Analyse eine Möglichkeit geboten, die Genauigkeit von Simulationsdaten und des Galerkin-Modells zu bewerten.

## 3.1 Galerkin-Methode

Die Strömung wird in einem kartesischen Koordinaten-System  $x, y, z$  beschrieben, wobei die  $x$ -Achse in Strömungsrichtung zeigt, die  $y$ -Achse in die Richtung der Scherung, und die  $z$ -Achse in Spannrichtung. Die Einheitsvektoren in positiver  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung werden durch  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{e}_z$ , respektive, gekennzeichnet. Entsprechend werden in der Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  die kartesischen Komponenten  $u := \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{u}$ ,  $v := \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{u}$  und  $w := \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u}$  zusammengefasst. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass alle Größen mit der maximalen Anströmgeschwindigkeit  $U$ , der charakteristischen Länge  $L$  und der Dichte  $\rho$  entdimensionalisiert sind.

Die Bewegung von inkompressiblen Strömungen wird beschrieben durch die Kontinuitätsgleichung,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{3.1}$$

und die Navier-Stokes-Gleichung

$$\partial_t \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \tag{3.2}$$

wobei  $\nu = 1/Re$  die reziproke Reynolds-Zahl darstellt.

Für die untersuchte Scherströmung werden mit einer Dirichlet-Bedingung die Geschwindigkeit  $\mathbf{u}_{\text{RB}}$  am Einströmrand sowie an den oberen und unteren Gebietsgrenzen vorgegeben,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_{\text{RB}}(\mathbf{x}, t). \tag{3.3}$$

Die Geschwindigkeitsfluktuation erfüllt die homogenisierte Dirichlet-Bedingung,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.4)$$

Bei dem Ausströmrand wird eine konvektive Randbedingung gewählt,

$$\partial_t \mathbf{u} + U_c \partial_x \mathbf{u} = 0, \quad (3.5)$$

wobei  $U_c$  die geschätzte Konvektionsgeschwindigkeit der ausströmenden Wirbel darstellt.

In Spannrichtung wird eine Periodizität mit der Wellenlänge  $L_z$  angenommen,

$$\mathbf{u}(x, y, 0, t) = \mathbf{u}(x, y, L_z, t). \quad (3.6)$$

Diese Randbedingungen wurden bereits in zahlreichen dreidimensionalen Simulationen von Kreiszyylinder-Nachläufen und Scherschichten gewählt [16, 44, 58, 132].

Für die Galerkin-Modellierung führen wir eine Kurznotation des Gebietsintegrals und des Randintegrals von einer beliebigen Größe  $F$  bzw. einem Vektor  $\mathbf{f}$  im Gebiet  $\Omega$  ein:

$$(F)_\Omega := \kappa \int_{\Omega} d\mathbf{x} F(\mathbf{x}), \quad (3.7)$$

$$[\mathbf{f}]_{\partial\Omega} := \kappa \oint_{\partial\Omega} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (3.8)$$

Für eine zweidimensionale Strömung ist  $\kappa = 1$ ,  $d\mathbf{x} = dx dy$  und  $d\mathbf{A}$  die nach außen zeigende Normale  $\mathbf{n} ds$ , wobei  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$  und  $ds$  die Bogenlänge darstellt. Für ein dreidimensionales Gebiet gilt  $d\mathbf{x} = dx dy dz$  und  $d\mathbf{A}$  repräsentiert das nach außen gerichtete Flächenelement. Des Weiteren gilt  $\kappa = 1/L_z$ , d.h. Volumen- und Flächenintegral beziehen sich auf die Einheitslänge in Spannrichtung. Diese Form der Normierung stellt die Vergleichbarkeit der Integrale von 2D und 3D Konfigurationen sicher, d.h. die Volumen- und Flächenintegrale einer 2D Strömung in dem 3D Gebiet entsprechen den Werten der Flächen- und Linienintegrale im 2D Gebiet.

Das innere Produkt zwischen zwei Geschwindigkeitsfeldern  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  lässt sich durch das Volumenintegral (3.7) definieren,

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega := (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})_\Omega. \quad (3.9)$$

Die zugehörige Norm von  $\mathbf{u}$  lautet

$$\|\mathbf{u}\|_\Omega := \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_\Omega}. \quad (3.10)$$

In der Galerkin-Approximation wird das mittlere Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}_0 = \bar{\mathbf{u}}$  als Grundmode eingeführt,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{u}^{[N]}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N a_i(t) \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^N a_i(t) \mathbf{u}_i(\mathbf{x}), \quad (3.11)$$

wobei  $a_0 \equiv 1$ . Die Grundmode erfüllt eine oder mehrere der oben aufgeführten Randbedingungen, d.h. (3.3), (3.5) oder (3.6), während die Entwicklungsmoden  $\mathbf{u}_i$ ,  $i \geq 1$  den homogenisierten Randbedingungen genügen, d.h. (3.4), (3.5) oder (3.6). Damit ist die Erfüllung der Randbedingungen der Entwicklung (3.11) für jede Wahl der Fourier-Koeffizienten  $a_i$ ,  $i \geq 1$  sichergestellt, sodass die Galerkin-Methode zu einem inneren Verfahren führt. Desweiteren überträgt sich bei der Karhunen-Loève-Zerlegung die Inkompressibilität der Strömung auf die Moden [38],

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (3.12)$$

die orthonormiert sind,

$$(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)_\Omega = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (3.13)$$

Damit ergibt sich für die Fourier-Koeffizienten

$$a_i = (\mathbf{u}_i, \mathbf{u} - \mathbf{u}_0)_\Omega, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.14)$$

Die Entwicklung (3.11) kann als Aufspaltung der Fluktuation in der Reynolds-Zerlegung in modale Beiträge  $\mathbf{u}_i^\pi$  betrachtet werden,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}', \quad (3.15a)$$

$$\mathbf{u}' = \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i^\pi, \quad (3.15b)$$

$$\mathbf{u}_i^\pi = a_i \mathbf{u}_i. \quad (3.15c)$$

Die ersten und zweiten Momente der Fourier-Koeffizienten werden aus dem Anhang A übernommen,

$$\overline{a_i} = 0, \quad \overline{a_i a_j} = \lambda_i \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (3.16)$$

Die Eigenschaften des räumlichen und zeitlichen Verhaltens der Galerkin-Approximation werden in Tab. 3.1 zusammengefasst.

Für die Galerkin-Modellierung wird — wie in den Beispielen aus Kapitel 2 — das Residuum der Navier-Stokes-Gleichung definiert,

$$\mathcal{N}[\mathbf{u}] := \partial_t \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (3.17)$$

**Tabelle. 3.1:** *Eigenschaften der Moden der Galerkin-Approximation*

Eigenschaften	Grundmode $\mathbf{u}_0$	Fluktuationsmoden $\mathbf{u}_i, i = 1, \dots, N$
Inkompressibilität	$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0$
Randbedingungen	inhomogen, z.B. (3.3)	homogenisiert, z.B. (3.4)
Orthonormalität	—	$(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$
Zeitverhalten	$a_0 = 1$	$a_i = a_i(t), \bar{a}_i = 0, \overline{a_i a_j} = \lambda_i \delta_{ij}$

und auf die  $i$ -te Mode projiziert,

$$(\mathbf{u}_i, \mathcal{N}[\mathbf{u}^{[N]}])_{\Omega} = 0. \quad (3.18)$$

In geschlossenen Strömungen mit stationären oder periodischen Randbedingungen leistet der Druckterm keinen Beitrag zu der Dynamik [38] und das resultierende Galerkin-System lautet

$$\frac{d}{dt} a_i = \nu \sum_{j=0}^N l_{ij} a_j + \sum_{j,k=0}^N q_{ijk}^k a_j a_k, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.19)$$

Die Koeffizienten  $l_{ij}$  und  $q_{ijk}$  berechnen sich aus den Moden wie folgt. Die Koeffizienten des Zähigkeitsterms betragen  $l_{ij} := (\mathbf{u}_i, \Delta \mathbf{u}_j)_{\Omega} = -(\nabla \otimes \mathbf{u}_i : \nabla \otimes \mathbf{u}_j)_{\Omega} + [\mathbf{u}_i \cdot \nabla \otimes \mathbf{u}_j]_{\partial \Omega}$ , wobei bei der Umformung die Green'sche Formel verwendet wurde. Das Symbol  $:$  bezeichnet die doppelte Kontraktion in der Tensoralgebra. In vorliegender Formel werden durch die Kontraktion zwei quadratische Matrizen  $\mathbf{A} = (A_{lm})$  und  $\mathbf{B} = (B_{lm})$  auf einen reellen Wert abgebildet,

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} := \sum_{l,m} A_{lm} B_{ml}.$$

Man beachte, dass sich die Differenziationsordnung von  $l_{ij}$  durch Verwendung der Green'schen Formel von zwei auf eins reduziert, wodurch sich auch der Diskretisierungsfehler verringert. Die Koeffizienten des Konvektivterms haben ebenfalls nur Ableitungen erster Ordnung,  $q_{ijk}^k := (\mathbf{u}_i, \nabla \cdot [\mathbf{u}_j \otimes \mathbf{u}_k])_{\Omega}$ . Die Summation in (3.19) beginnt bei  $j, k = 0$ , d.h. die Zähigkeits- und Konvektivterme enthalten auch konstante und lineare Wechselwirkungen mit der Grundströmung  $\mathbf{u}_0$ . Tabelle 3.2 zeigt ein Herleitungsdiagramm für das Galerkin-System, welches die Druckterm-Darstellung aus dem folgenden Abschnitt der Vollständigkeit halber antizipiert.

**Tabelle. 3.2:** Herleitungsschema für das Galerkin-System (GS). In jeder Spalte stehen alle Terme der Navier-Stokes-Gleichung (NSG), die zeilenartig in lokaler Beschleunigung, konvektiver Beschleunigung, Zähigkeitsterm und Druckterm zusammengefasst werden. Von links nach rechts ist die NSG in ursprünglicher Form, nach der Reynolds-Zerlegung, nach der Galerkin-Projektion und nach weiteren Zusammenfassungen des Galerkin-Systems dargestellt. Man beachte, dass  $a_0 \equiv 1$ . Die Galerkin-Projektion des Druckterms wird in §3.2 abgeleitet und nicht in einen konstanten, linearen und quadratischen Term aufgespalten.

NSG	NSG mit $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}'$	Galerkin- Projektion	Galerkin- System	Galerkin- System (vereinfacht)
$\partial_t \mathbf{u} =$	$\partial_t \mathbf{u}' =$	$(\mathbf{u}_i, \partial_t \mathbf{u}')_{\Omega} =$	$\frac{d}{dt} a_i =$	$\frac{d}{dt} a_i =$
$-\nabla \cdot [\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}]$	$-\nabla \cdot [\mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{u}_0]$ $-\nabla \cdot [\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}_0]$ $-\nabla \cdot [\mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{u}']$ $-\nabla \cdot [\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}']$	$-(\mathbf{u}_i, \nabla \cdot [\mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{u}_0])_{\Omega}$ $-(\mathbf{u}_i, \nabla \cdot [\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}_0])_{\Omega}$ $-(\mathbf{u}_i, \nabla \cdot [\mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{u}'])_{\Omega}$ $-(\mathbf{u}_i, \nabla \cdot [\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'])_{\Omega}$	$q_{i00}^k$ $+ \sum_{j=1}^N q_{ij0}^k a_j$ $+ \sum_{j=1}^N q_{i0j}^k a_j$ $+ \sum_{j,k=1}^N q_{ijk}^k a_j a_k$	$+ \sum_{j,k=0}^N q_{ijk}^k a_j a_k$
$+\nu \Delta \mathbf{u}$	$+\nu \Delta \mathbf{u}_0$ $+\nu \Delta \mathbf{u}'$	$+\nu (\mathbf{u}_i, \Delta \mathbf{u}_0)_{\Omega}$ $+\nu (\mathbf{u}_i, \Delta \mathbf{u}')_{\Omega}$	$+\nu l_{i0}$ $+\nu \sum_{j=1}^N l_{ij} a_j$	$+\nu \sum_{j=0}^N l_{ij} a_j$
$-\nabla p$	$-\nabla p_0$ $-\nabla p'$	$-(\mathbf{u}_i, \nabla p_0)_{\Omega}$ $-(\mathbf{u}_i, \nabla p')_{\Omega}$	$+ \sum_{j,k=0}^N q_{ijk}^p a_j a_k$	$+ \sum_{j,k=0}^N q_{ijk}^p a_j a_k$

### 3.2 Galerkin-Darstellung des Druckterms

Die adäquate Galerkin-Darstellung des Druckterms war Gegenstand vieler Ansätze und Diskussionen in der Literatur:

1. Für periodisch fortgesetzte Rohr- und Kanalströmungen lässt sich leicht zeigen, dass der Druckterm verschwindet [9, 64]. Ebenso kann dies für geschlossene Strömungen mit stationären Randbedingungen bewiesen werden [49]. Die Inkompressibilität der Moden

ermöglicht nämlich eine Transformation des Galerkin-projezierten Druckterms in ein Oberflächenintegral nach dem Gauss'schen Integralsatz,

$$(\mathbf{u}_i, -\nabla p)_\Omega = -(\mathbf{u}_i \nabla p)_\Omega = -(\nabla \cdot [p \mathbf{u}_i])_\Omega = -[p \mathbf{u}_i]_{\partial\Omega}.$$

Mit  $\mathbf{u}_i = 0$  am Rand verschwindet auch der Druckterm.

2. Für bestimmte numerische Umströmungsprobleme mit stressfreien Ausströmbedingungen kann ebenfalls das Verschwinden der Galerkin-Projektion des Druckterms gezeigt werden [1, 20]. Mit diesen Randbedingungen wird eine möglicherweise wichtige Druckleistung vernachlässigt [84], sodass die Randbedingung einen ggf. unphysikalischen Eingriff in die Physik bedeuten kann.
3. In der Pionierarbeit [3] wurde das erste empirische Galerkin-Modell für die Dynamik der turbulenten Grenzschicht vorgeschlagen. Auf die Wichtigkeit des Druckterms wurde hingewiesen und durch einen empirischen Druckkraft-Term in dem Galerkin-Modell Rechnung getragen. Dieser sehr heuristische Kraftterm koppelt nicht mit der Strömung zurück und wurde in der Literatur kaum weiter verfolgt.
4. Rempfer [95] weicht daher bei der empirischen Galerkin-Modellierung der transitionellen Grenzschicht auf die druckfreie Wirbeltransport-Gleichung für  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  aus,

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \otimes \mathbf{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (3.20)$$

Bei der Galerkin-Projektion auf diese Gleichung braucht der Druckterm nicht modelliert zu werden. Man handelt sich jedoch eine kompliziertere Darstellung der Zeitableitung mit einer Massenmatrix  $m_{ij}^\omega$  ein,

$$\sum_{j=0}^N m_{ij}^\omega a_j = \nu \sum_{j=0}^N l_{ij}^\omega a_j + \sum_{j,k=0}^N q_{ijk}^\omega a_j a_k, \quad (3.21)$$

wobei  $l_{ij}^\omega, q_{ijk}^\omega$  weitere modenabhängige Koeffizienten sind. Der Ansatz bedingt eine höhere Ableitungsordnung im Raum von mindestens 2. Bei mathematischen Galerkin-Modellen wird ein ähnlicher Weg verfolgt [13, 73, 74].

5. In [31] wird die höhere Ableitungsordnung durch Projektion auf die Navier-Stokes-Gleichung vermieden und eine lineare Druckdarstellung  $(\mathbf{u}_i, -\nabla p)_\Omega = \sum_{j=1}^N l_{ij}^p a_j$  im Galerkin-System postuliert. Die Koeffizienten  $l_{ij}^p$  werden durch Minimierung des Galerkin-System-Residuums angepasst.

Die begangenen Wege für die offene Strömung sind aus verschiedenen Gründen unbefriedigend. Das Ausweichen auf die Wirbeltransport-Gleichung ist eine mathematisch exakte Modellierung, jedoch numerisch wegen der höheren Ableitungsordnung ungünstig. Bei Large-Eddy-Simulationen zweiter Diskretisierungsordnung können die zweiten numerischen Raumableitungen eine große Fehlerquelle darstellen [A. IOLLO 2005, private Mitteilung]. Außerdem lässt sich in dem resultierenden Galerkin-System der Einfluss des Druckterms nicht direkt spezifizieren.

Die Einführung empirischer Galerkin-System-Terme nach Projektion auf die Navier-Stokes-Gleichung ist akademisch unbefriedigend. Der Druck ist eine Funktion des Geschwindigkeitsfeldes und sollte sich somit als analytische Funktion der Fourier-Koeffizienten darstellen lassen.

In vorliegender Arbeit wird ein Ansatz verschiedener Autoren auf der Basis der Druck-Poisson-Gleichung für geschlossene Strömungen weiterverfolgt [38]. Die Druck-Poisson-Gleichung lautet

$$\Delta p = s, \quad (3.22)$$

wobei der Quellterm sich darstellen lässt durch

$$\begin{aligned} s &:= [\nabla \otimes \mathbf{u}] : [\nabla \otimes \mathbf{u}] \\ &= \left[ \nabla \otimes \left( \sum_{j=0}^N a_j \mathbf{u}_j \right) \right] : \left[ \nabla \otimes \left( \sum_{j=0}^N a_j \mathbf{u}_j \right) \right] \\ &= \sum_{j,k=0}^N s_{jk} a_j a_k \end{aligned} \quad (3.23)$$

mit  $s_{jk} := [\nabla \otimes \mathbf{u}_j] : [\nabla \otimes \mathbf{u}_k]$ . Den Druck entwickeln wir analog zum Quellterm,

$$p = \sum_{j,k=0}^N p_{jk} a_j a_k, \quad (3.24)$$

und fordern

$$\Delta p_{jk} = s_{jk}, \quad j, k = 0, 1, \dots, N. \quad (3.25)$$

Augenscheinlich löst der Ansatz (3.24) mit (3.25) die Druck-Poisson-Gleichung. Für die Galerkin-Projektion des Druckterms folgt

$$(\mathbf{u}_i, -\nabla p)_\Omega = \left( \mathbf{u}_i, -\nabla \left[ \sum_{j,k=0}^N p_{jk} a_j a_k \right] \right)_\Omega = \sum_{j,k=0}^N q_{ijk}^p a_j a_k, \quad (3.26)$$

wobei  $q_{ijk}^p := (\mathbf{u}_i, \nabla p_{jk})_\Omega$ . Die Form des resultierenden Galerkin-Systems wird somit durch den Druckterm nicht verändert,

$$\dot{a}_i = \nu \sum_{j=0}^N l_{ij} a_j + \sum_{j,k=0}^N q_{ijk} a_j a_k. \quad (3.27)$$

Lediglich die Koeffizienten des quadratischen Terms werden gemäß  $q_{ijk} = q_{ijk}^k + q_{ijk}^p$  geändert.

Für geschlossene Strömung wird die Druckentwicklung (3.24) bereits seit vielen Jahren verwendet [110], jedoch ist diese Entwicklung ohne Bedeutung für das Galerkin-System wegen  $q_{ijk}^p \equiv 0$ . Für offene Strömungen besteht die Crux der Druckentwicklung in der Erfüllung der Randbedingungen [97]. Hierfür wurde erstmals vom Autor [84] eine exakte Druckterm-Darstellung bei Dirichlet'schen (3.3), periodischen (3.6) und konvektiven Randbedingungen (3.5) abgeleitet. Auf eine Wiederholung der im Originalartikel beschriebenen aufwendigen Analytik sei hier verzichtet.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass der in [95] mit der Wirbeltransport-Gleichung eingeschlagene Weg ebenfalls zu einem Galerkin-System der Form (3.27) führt, wenn man Gl. (3.21) nach den  $\hat{a}_i$  auflöst. Der Einfluss des Druckterms ist dort schon implizit in den  $q_{ijk}$  enthalten, d.h. die Wirkung des Konvektiv- und Druckterms werden gemeinsam in einem Term aufgelöst.

### 3.3 Galerkin-Darstellung der Transienten

Die Karhunen-Loève-Zerlegung führt zu einer Galerkin-Approximation mit dem geringst möglichen zeitgemittelten Residuumsquadrat

$$R_u^2 := \overline{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{[N]}\|_\Omega^2},$$

bei gegebener Anzahl der Moden  $N$  [38]. Diese Optimalitätseigenschaft bedeutet eine maximale Datenkompression, d.h. statt  $M$  Schnappschüssen braucht man bei vorgegebenem maximalem Fehler für  $R_u^2$  nur  $N$  Karhunen-Loève-Moden und  $NM$  Fourier-Koeffizienten zu speichern. Datenkompressionen von einer und mehr Größenordnungen sind oft erzielbar. Die Optimalitätseigenschaft kann aber bei dem Galerkin-Modell zu dem Verlust von dynamisch wichtigen Phasenraumrichtungen führen, wie wir am Beispiel des gewöhnlichen Differenzialgleichungs-Systems aus §2.2 gesehen haben. Der Verlust dieser Phasenraumrichtungen kann im Extremfall dazu führen, dass eine global stabile, periodische Strömung bei der Galerkin-Projektion auf einen instabilen Grenzyklus abgebildet wird, d.h. ein wenig sinnvolles Galerkin-System entsteht [98].

Im Regelfall haben die vernachlässigten Phasenraumrichtungen einen stabilisierenden Effekt auf den Galerkin-Attraktor. Eine realistische Darstellung von Transienten kann bei der empirischen Galerkin-Methode nicht erwartet werden [80, 84]. Im Vergleich zu den empirischen Modellen sind die mathematischen und physikalischen Varianten tendenziell weniger genau bei der Re-

produktion des Attraktors. Jedoch haben die nicht-empirischen Varianten mit mindestens einer Größenordnung mehr an Moden eine viel realistischere Darstellung der Transienten.

Als Beispiel soll der zweidimensionale periodische Nachlauf eines Kreiszyinders bei der Reynolds-Zahl 100 dienen. Eine FEM-Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichung von dritter Diskretisierungsordnung in Raum und Zeit basiert auf knapp 16000 Gitterpunkte [80] und erzielt  $O(1\%)$  Genauigkeit. Das empirische Galerkin-Modell reproduziert mit 6 Moden die Navier-Stokes-Simulation mit 1% Genauigkeit. Eine mathematische Galerkin-Variante [74] benötigt hingegen 63 Moden für  $O(10\%)$  Genauigkeit. Diese mathematische Variante kann aber dafür die Instabilitätseigenschaften und die Transienten auf einem Reynolds-Zahl-Intervall von 1 bis 300 [73] ebenfalls mit 10% Genauigkeit auflösen, wohingegen das empirische Modell versagt.

Bei komplexen Geometrien ist die Konstruktion von mathematischen und physikalischen Moden mit z.Z. kaum überwindbaren analytischen und numerischen Komplikationen verbunden. Ein oft begangener Weg ist die Verallgemeinerung der Karhunen-Loève-Zerlegung mit den fehlenden dynamisch wichtigen Phasenraumrichtungen. Hierfür gibt es verschiedene Varianten:

1. In dem Schnappschuss-Ensemble für die Karhunen-Loève-Zerlegung werden *natürliche Transienten* eingeschlossen [20]. Hierdurch wird das Galerkin-System im Regelfall stabiler, aber die Eigenschaften des Systems hängen stark von der gewählten Transiente ab. Sind zu viele Schnappschüsse in der transienten Phase, wird der Attraktor ggf. nicht genau aufgelöst. Sind zu viele Schnappschüsse in der eingeschwungenen Phase, wird der Attraktor kaum stabilisiert.
2. Ein zweiter Weg sind Schnappschuss-Ensemble von *angeregten Transienten*. Ein Beispiel von [8] ist eine Chirp-Anregung des Kreiszyinder-Nachlaufs durch eine Rotation des Zylinders. Dieser Weg führte zu einem robusten 40-dimensionalen Modell für eine Reglersynthese. Eine Bewertung der allgemeineren Verwendbarkeit dieses Ansatzes dürfte wegen der Neuigkeit zur Zeit nicht möglich sein. Mit Sicherheit hängen auch hier die Galerkin-System-Eigenschaften stark von der gewählten Anregung und Transiente ab.
3. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Karhunen-Loève-Zerlegung für ein einziges Ensemble von Schnappschüssen *aus einer endlichen Anzahl eingeschwungener Strömungen* zu entwickeln [45]. Ein Beispiel wäre 1000 Schnappschüsse aus jeweils 100 Strömungsfeldern für 10 verschiedene Reynolds-Zahlen. Bei diesem Ansatz gibt es jedoch immer einen Gewichtungsbias der verschiedenen Strömungszustände. So müsste beispielsweise die Anzahl der Datensätze mit der Komplexität des Strömungszustandes korreliert werden. Darüber

hinaus kann keine Obergrenze für das Residuum der einzelnen Strömungszustände garantiert werden.

4. Diesem Problem wird in dem ‚Sequential Proper Orthogonal Decomposition‘ (SPOD) Ansatz von [42, 58] Rechnung getragen. Die Karhunen-Loève-Zerlegung wird *sukzessiv mit neuen Moden* für neue, eingeschwungene Strömungen erweitert. Dieser Weg hat gegenüber den vorangegangenen Ansätzen den Vorteil, dass alle Datensätze gleich gewichtet werden und dass eine Obergrenze für die Residuen bei den einzelnen Datensätzen garantiert werden kann.
5. Mit zunehmender Anzahl von aufgelösten Strömungszuständen wächst die Dimension von SPOD. In jedem einzelnen Zustand gibt es viele Phasenraumrichtungen die energetisch nicht wichtig sind, und die sowohl die Integration des Galerkin-Systems als auch regelungstechnische Aufgabenstellungen verkomplizieren. Daher wird von der Arbeitsgruppe des Autors eine hierarchische Galerkin-Approximation mit einer zustandsabhängigen Datenbasis von POD Moden entwickelt. Die geringere Dimension über eine Vielzahl von Strömungszuständen wird mit einer z.Z. noch un stetigen Switching-Strategie erkaufte [52]. Diese Unstetigkeit kann durch eine kontinuierliche Modeninterpolation vermieden werden [70].

Der hier verfolgte Weg kann als eine physikalisch motivierte Verallgemeinerung der SPOD betrachtet werden. Besonderes Augenmerk gilt einer besonders niederdimensionalen Strömungsdarstellung. Zunächst wird der Mean-Field-Theorie [119] Rechnung getragen. In dieser Theorie wird das Einschwingen oszillatorischer Strömungen nach einer (weichen) superkritischen Hopf-Bifurkation modelliert. In dieser Theorie spielen neben zwei Stabilitätsmoden, welche die oszillatorische Fluktuation beschreiben, auch die Differenz zwischen der stationären Lösung und der gemittelten Strömung eine besondere Rolle. Die stationäre Lösung  $\mathbf{u}_s$  erfüllt die Navier-Stokes-Gleichung ohne Zeitableitung,

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}_s \otimes \mathbf{u}_s) = -\nabla p_s + \nu \Delta \mathbf{u}_s. \quad (3.28)$$

Die gemittelte Lösung  $\mathbf{u}_0$  ergibt sich aus der Reynolds-Gleichung,

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{u}_0) = -\nabla p_0 + \nu \Delta \mathbf{u}_0 - \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}). \quad (3.29)$$

Der Unterschied zwischen beiden Grundströmungen, der Mean-Field-Korrektur  $\delta \mathbf{u} := \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_s$ , wird durch die Divergenz des Reynolds-Tensors als Kraftterm in Gl. (3.29) hervorgerufen. Die Differenz zwischen den Gleichungen (3.28) und (3.29) ergibt

$$\nabla \cdot (\delta \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0 \otimes \delta \mathbf{u}) + O(\delta \mathbf{u}^2) = -\nabla \delta p + \nu \Delta \delta \mathbf{u} - \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}), \quad (3.30)$$

wobei in linearer Näherung der quadratische Term in  $\delta \mathbf{u}$  vernachlässigt wird. Der Druckterm wirkt als Lagrange-Multiplikator für die Erhaltung der Inkompressibilitätsbedingung und braucht bei der Entwicklung nicht diskutiert zu werden [78]. Der Term würde beispielsweise bei einer Diskussion auf der Basis der Wirbeltransport-Gleichung (3.20) wegfallen.

Aus der Mean-Field-Gleichung (3.30) sieht man unmittelbar, dass  $\delta \mathbf{u}$  quadratisch von der Fluktuationsamplitude abhängt. Insbesondere gilt  $\delta \mathbf{u} \equiv 0$  für  $\mathbf{u}' \equiv 0$ . Ein höheres Fluktuationsniveau führt somit zu einer größeren Mean-Field-Korrektur. Bei einer superkritischen Bifurkation wird dadurch die Produktion in die Fluktuation gedrosselt bis sich ein Gleichgewicht der Energieflüsse einstellt [80, 119].

Die Mean-Field-Korrektur ist somit eine dynamisch wichtige Phasenraumrichtung für das Einschwingen. Diese Mode wird in vielen Beispielen nicht adäquat durch die Karhunen-Loève-Zerlegung aufgelöst. Wir erweitern daher die  $N$ -dimensionale Galerkin-Approximation durch die Mean-Field-Korrektur zu einer orthonormierten  $N + 1$ -dimensionalen Entwicklung wie folgt:

$$\mathbf{u}_{\Delta}^{(a)} := \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_s; \quad (3.31a)$$

$$\mathbf{u}_{\Delta}^{(b)} := \mathbf{u}_{\Delta}^{(a)} - \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{\Delta}^{(a)} \right)_{\Omega} \mathbf{u}_i; \quad (3.31b)$$

$$\mathbf{u}_{\Delta} := \frac{\mathbf{u}_{\Delta}^{(b)}}{\|\mathbf{u}_{\Delta}^{(b)}\|_{\Omega}} \quad (3.31c)$$

Das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}_{\Delta}$  wird als *Verschiebungsmode* bezeichnet, weil es das Zentrum des Attraktors fluktuationsabhängig verschiebt. Diese Mode kann als  $N + 1$ -te Mode der Galerkin-Approximation hinzugefügt werden,  $\mathbf{u}_{N+1} := \mathbf{u}_{\Delta}$ . Bei der Galerkin-Approximation und dem Galerkin-System geht nur die Orthonormalität der Moden ein, d.h. es ändert sich nicht deren Form, sondern nur die Ordnung.

Analog zu dem Algorithmus (3.31) lassen sich noch weitere Moden der Mean-Field-Theorie einführen. Die infinitesimale Nachbarschaft der stationären Strömung wird durch die linearisierte Navier-Stokes-Gleichung beschrieben,

$$\partial_t \mathbf{u}' + \nabla \cdot (\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_s \otimes \mathbf{u}') = -\nabla p' + \nu \Delta \mathbf{u}'. \quad (3.32)$$

Bei den hier betrachteten oszillatorischen Strömungsinstabilitäten identifiziert die globale Stabilitätsanalyse die am schnellsten wachsende Normalmode als Lösung von (3.32) zu

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) := e^{\lambda_1^* t} \mathbf{f}_1^*(\mathbf{x}). \quad (3.33)$$

Der Stabilitätseigenwert  $\lambda_1^* = \sigma_1^* + i \omega_1^*$  beinhaltet die (reelle) Wachstumsrate der Amplitude  $\sigma_1^*$  und die Kreisfrequenz der Fluktuation  $\omega_1^*$  als Imaginärteil. Die instabilste Normalmode  $\mathbf{f}_1^*$  ist ein komplexwertiges Strömungsfeld. Der Realteil  $\mathbf{u}_1^* := \Re \{\mathbf{f}_1^*\}$  und Imaginärteil  $\mathbf{u}_2^* := \Im \{\mathbf{f}_1^*\}$  der komplexen Eigenmode  $\mathbf{f}_1^*$  spannen eine Ebene auf, auf der  $\mathbf{u}'$  von  $\mathbf{u}_s$  weg spiralt. Diese beiden Phasenraumrichtungen können der Karhunen-Loève-Zerlegung ebenfalls analog zu (3.31) als weitere orthonormierte Moden hinzugeführt werden. In Kapitel 4 werden entsprechende verallgemeinerte Galerkin-Modelle vorgestellt.

Ein interessanter Nebenaspekt der Karhunen-Loève-Zerlegung ist die Möglichkeit neue Phasenraumrichtungen aus dem Reynolds-Spannungstensor und der linearisierten Reynolds-Gleichung (3.30) zu konstruieren. Der Reynolds-Spannungstensor lässt sich in modale Anteile gemäß (A.9) zerlegen,

$$\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} = \overline{\left( \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{u}_i \right) \otimes \left( \sum_{j=1}^N a_j \mathbf{u}_j \right)} = \sum_{i=1}^N \lambda_i (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i). \quad (3.34)$$

Aus Gl. (3.30) kann somit zu jeder Karhunen-Loève-Mode eine weitere ‚Verschiebungsmode‘ berechnet werden. Dieser Gedanke soll in zukünftigen Arbeiten weiterverfolgt werden. Die Benutzung der Navier-Stokes-Nichtlinearität zur Konstruktion neuer Moden aus einer gegebenen Basis wird bereits in physikalischen Modellen der Scherströmung verfolgt [63].

### 3.4 Globale und modale Energiefluss-Analyse

Zu den strömungsmechanischen Grundgleichungen gehören neben der Massen- und Impulsbilanz auch die Energiegleichung. Die Massenbilanz wird für inkompressible Strömungen exakt durch die Galerkin-Entwicklung (3.11) aufgelöst und die Navier-Stokes-Gleichung dient als Grundlage für die Ableitung eines dynamischen Modells. In diesem Abschnitt soll auf die Energiefluss-Analyse eingegangen werden, da sie sich als ein diagnostisches Werkzeug für die Genauigkeit der Simulationsdaten, für die Entwicklung der Galerkin-Modelle und für die Analyse der Grobstruktur-Wechselwirkungen bewährt hat.

In der statistischen Fluidynamik (siehe z.B. [104]) wird der Energiehaushalt für die Fluktuation  $\mathbf{u}'$  bestimmt. In dem Gebiet  $\Omega$  ist die mittlere Fluktuationsenergie gegeben durch

$$\mathcal{K}_\Omega = \left( \frac{1}{2} \overline{\|\mathbf{u}'\|^2} \right)_\Omega = \frac{1}{2} (\overline{\mathbf{u}', \mathbf{u}'} )_\Omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i. \quad (3.35)$$

Der Einfachheit halber soll im Folgenden angenommen werden, dass die Fluktuation durch die

ersten  $N$  Moden exakt beschrieben wird.<sup>1</sup> Die Bilanz der Fluktuationsenergie wird durch Galerkin-Projektion des Residuums der Navier-Stokes-Gleichung auf die Fluktuation und anschließende Mittelung bestimmt, d.h.

$$\overline{(\mathbf{u}', \mathcal{N}[\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}'])}_\Omega = 0. \quad (3.36)$$

Die zeitliche Veränderung der Energie wird beschrieben durch

$$0 = \frac{d}{dt} \mathcal{K}_\Omega = \mathcal{P}_\Omega + \mathcal{D}_\Omega + \mathcal{C}_\Omega + \mathcal{I}_\Omega + \mathcal{F}_\Omega, \quad (3.37)$$

wobei die einzelnen Terme in dem Herleitungsdiagramm von Tabelle 3.3 aufgeführt sind und in leicht unterschiedlichen Fassungen in den meisten Büchern der Strömungsmechanik zu finden sind. Hierbei beschreibt die *Produktion*  $\mathcal{P}_\Omega$  den Energiefluss von der mittleren Strömung in

**Tabelle. 3.3:** Herleitungsschema für die globale Energiefluss-Bilanz der Fluktuationsenergie.

NSG mit $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}'$	Galerkin-Projektion auf $\mathbf{u}'$	Globale Energie- fluss-Bilanz (gemittelt)	dto. (Kurz- form)
$\partial_t \mathbf{u}' =$	$(\mathbf{u}', \partial_t \mathbf{u}')_\Omega =$	$0 =$	$0 =$
$-\nabla \cdot [\mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{u}_0]$	$-(\mathbf{u}', \nabla \cdot [\mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{u}_0])_\Omega$		
$-\nabla \cdot [\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}_0]$	$-(\mathbf{u}', \nabla \cdot [\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}_0])_\Omega$	$-(\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} : \nabla \otimes \mathbf{u}_0)_\Omega$	$\mathcal{P}_\Omega$
$-\nabla \cdot [\mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{u}']$	$-(\mathbf{u}', \nabla \cdot [\mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{u}'])_\Omega$	$-\left[\mathbf{u}_0 \frac{1}{2} \overline{\ \mathbf{u}'\ ^2}\right]_{\partial\Omega}$	$+\mathcal{C}_\Omega$
$-\nabla \cdot [\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}']$	$-(\mathbf{u}', \nabla \cdot [\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'])_\Omega$	$-\left[\mathbf{u}' \frac{1}{2} \overline{\ \mathbf{u}'\ ^2}\right]_{\partial\Omega}$	$+\mathcal{I}_\Omega$
$+\nu \Delta \mathbf{u}_0$	$+\nu (\mathbf{u}', \Delta \mathbf{u}_0)_\Omega$		
$+\nu \Delta \mathbf{u}'$	$+\nu (\overline{\mathbf{u}'}, \Delta \mathbf{u}')_\Omega$	$+\nu (\overline{\mathbf{u}' \cdot \Delta \mathbf{u}'})_\Omega$	$+\mathcal{D}_\Omega$
$-\nabla p$	$-(\mathbf{u}', \nabla p)_\Omega$	$-\left[\overline{\mathbf{u}' p'}\right]_{\partial\Omega}$	$+\mathcal{F}_\Omega$

die Fluktuationsenergie, die *Dissipation*  $\mathcal{D}_\Omega$  die Umwandlungsrate in Wärme, der *Konvektionsterm*  $\mathcal{C}_\Omega$  quantifiziert wie schnell die Fluktuationsenergie durch den Gebietsrand strömt, der *Transferterm*  $\mathcal{I}_\Omega$  ist die Nettobilanz der Modenwechselwirkung und ebenfalls durch einen Fluss am Gebietsrand charakterisiert und die *Druckleistung*  $\mathcal{P}_\Omega$  bestimmt die Leistung des Drucks auf die Fluktuation.

<sup>1</sup>Ansonsten wäre  $N = \infty$  zu setzen oder das Gleichheitszeichen durch ein Ungleichheitszeichen zu ersetzen.

Anhand der Größe dieser Terme erhält man einen ersten Einblick in die Art der Strömung. Beispielsweise dominiert in einer Gleichgewichtsströmung die Produktion und Dissipation, hingegen in einer wachsenden Scherströmung die Produktion und Konvektion. Desweiteren ist eine erste Überprüfung der Datenqualität durch Berechnung des Energiefluss-Residuums  $\mathcal{R}_E := \mathcal{P}_\Omega + \mathcal{D}_\Omega + \mathcal{C}_\Omega + \mathcal{T}_\Omega + \mathcal{F}_\Omega$  möglich.

Mit der Karhunen-Loève-Zerlegung lässt sich die Energie-Bilanz auf modale Beiträge verfeinern. So hat Rempfer [95] eine Energiefluss-Bilanz für die transitionelle Grenzschicht für die Karhunen-Loève-Moden abgeleitet. Die Bilanz (siehe seine Gl. (5.16)) basiert auf der Wirbeltransport-Gleichung und fasst die modalen Wechselwirkungen von Druck- und Konvektivterm zusammen. In [19, 80] wird eine modale Bilanz mit der Navier-Stokes-Gleichung unter Vernachlässigung des Druckterms bestimmt.

In vorliegender Arbeit wird erstmals eine vollständige modale Energiefluss-Bilanz mit einem modalen Druckleistungs-Term durchgeführt. Grundlage ist eine Projektion des Navier-Stokes-Residuums auf den modalen Fluktuationsanteil,

$$\overline{(\mathbf{u}_i^\pi, \mathcal{N}[\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}'])}_\Omega = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.38)$$

Man beachte, dass die Aufsummierung aller modaler Bilanzen (3.38) wieder zum Ansatz (3.36) für die globale Bilanz der Fluktuationsenergie führt.

Die Einzelterme der modalen Bilanz werden analog zur globalen Version (3.37) bestimmt,

$$0 = \frac{d}{dt} \mathcal{K}_i = \mathcal{P}_i + \mathcal{D}_i + \mathcal{C}_i + \mathcal{T}_i + \mathcal{F}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.39)$$

wobei sich die modalen Energie-Terme zu den globalen aufsummieren lassen,

$$\mathcal{K}_\Omega = \sum_{i=1}^N \mathcal{K}_i, \quad \mathcal{P}_\Omega = \sum_{i=1}^N \mathcal{P}_i, \quad \mathcal{D}_\Omega = \sum_{i=1}^N \mathcal{D}_i, \quad (3.40a)$$

$$\mathcal{C}_\Omega = \sum_{i=1}^N \mathcal{C}_i, \quad \mathcal{T}_\Omega = \sum_{i=1}^N \mathcal{T}_i, \quad \mathcal{F}_\Omega = \sum_{i=1}^N \mathcal{F}_i. \quad (3.40b)$$

Diese Additivitätseigenschaft rechtfertigt, von einer modalen Zerlegung der globalen Bilanz zu sprechen. Tabelle 3.4 enthält das Herleitungsschema mit den entsprechenden Termen.

Interessant sind aus Tab. 3.4 die Beziehungen

$$\mathcal{P}_i = 2q_{ii0} \mathcal{K}_i, \quad (3.41a)$$

$$\mathcal{C}_i = 2q_{i0i} \mathcal{K}_i, \quad (3.41b)$$

$$\mathcal{D}_i = 2\nu l_{ii} \mathcal{K}_i. \quad (3.41c)$$

**Tabelle. 3.4:** Herleitungsschema für die modale Energiefluss-Bilanz analog zu Tab. 3.3. Hierbei werden die Approximationen für das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}' = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{u}_i$  (3.15c) und das Druckfeld  $p = \sum_{j,k=0}^N p_{jk} a_j a_k$  (3.24) verwendet. Die gemittelte Bilanz vereinfacht sich durch  $\overline{a_i} = 0$  und  $\overline{a_i a_j} = \lambda_i \delta_{ij}$ . Die Kurzform fasst die Terme in der gleichen Zeile zusammen.

NSG mit $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}'$	Projektion auf $a_i \mathbf{u}_i$	Galerkin- Darstellung	Modale Energie- fluss-Bilanz (gemittelt)	dto. (Kurzform)
$\partial_t \mathbf{u}' =$	$(a_i \mathbf{u}_i, \partial_t \mathbf{u}')_{\Omega} =$	$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} a_i^2 \right) =$	$0 =$	$0 =$
$-\nabla \cdot [\mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{u}_0]$	$-(a_i \mathbf{u}_i, \nabla \cdot [\mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{u}_0])_{\Omega}$	$q_{i0}^k a_i$		
$-\nabla \cdot [\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}_0]$	$-(a_i \mathbf{u}_i, \nabla \cdot [\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}_0])_{\Omega}$	$+\sum_{j=1}^N q_{ij0}^k a_i a_j$	$+q_{ii0}^k \lambda_i$	$\mathcal{P}_i$
$-\nabla \cdot [\mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{u}']$	$-(a_i \mathbf{u}_i, \nabla \cdot [\mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{u}'])_{\Omega}$	$+\sum_{j=1}^N q_{i0j}^k a_i a_j$	$+q_{i0i}^k \lambda_i$	$+\mathcal{C}_i$
$-\nabla \cdot [\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}']$	$-(a_i \mathbf{u}_i, \nabla \cdot [\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'])_{\Omega}$	$+\sum_{j,k=1}^N q_{ijk}^k a_i a_j a_k$	$+\sum_{j,k=1}^N q_{ijk}^k \overline{a_i a_j a_k}$	$+\mathcal{T}_i$
$+\nu \Delta \mathbf{u}_0$	$+\nu (a_i \mathbf{u}_i, \Delta \mathbf{u}_0)_{\Omega}$	$+\nu l_{i0} a_i$		
$+\nu \Delta \mathbf{u}'$	$+\nu (a_i \mathbf{u}_i, \Delta \mathbf{u}')_{\Omega}$	$+\nu \sum_{j=0}^N l_{ij} a_i a_j$	$+\nu l_{ii} \lambda_i$	$+\mathcal{D}_i$
$-\nabla p$	$-(a_i \mathbf{u}_i, \nabla p)_{\Omega}$	$+\sum_{j,k=0}^N q_{ijk}^p a_i a_j a_k$	$+\sum_{j,k=0}^N q_{ijk}^p \overline{a_i a_j a_k}$	$+\mathcal{F}_i$

Gleichung (3.41) besagt, dass die modale Produktion  $\mathcal{P}_i$  nur von  $\mathcal{K}_i$  und nicht von den anderen Energien abhängt. Der Koeffizient  $\mathcal{K}_i/\mathcal{P}_i = 1/(2q_{ii0})$  beschreibt die Zeit, welche bei konstanter modaler Produktion  $\mathcal{P}_i$  benötigt wird, um das Energieniveau  $\mathcal{K}_i$  aufzufüllen. Anders formuliert drückt  $\mathcal{P}_i/\mathcal{K}_i = 2q_{ii0}$  einen Beitrag zu einer Wachstumsrate aus. Ökonomisch betrachtet drückt sich in  $2q_{ii0}$  die Effizienz der Mode aus, ein gegebenes Energiekapital  $\mathcal{K}_i$  durch Wechselwirkung mit der Grundströmung zu mehren. Wir wollen  $p_i^{\bullet} = \mathcal{P}_i/\mathcal{K}_i$  daher als *Produktions-Effizienz* bezeichnen. Analoge Betrachtungen führen zur Einführung der *Dissipations-Effizienz*  $d_i^{\bullet}$ , der *Konvektions-Effizienz*  $c_i^{\bullet}$ , der *Transfer-Effizienz*  $t_i^{\bullet}$ , der *Druckleistungs-Effizienz*  $f_i^{\bullet}$ ,

$$\mathcal{P}_i = p_i^{\bullet} \mathcal{K}_i, \quad \mathcal{D}_i = d_i^{\bullet} \mathcal{K}_i, \quad (3.42a)$$

$$\mathcal{C}_i = c_i^{\bullet} \mathcal{K}_i, \quad \mathcal{T}_i = t_i^{\bullet} \mathcal{K}_i, \quad \mathcal{F}_i = f_i^{\bullet} \mathcal{K}_i. \quad (3.42b)$$

Gemäß Gl. (3.41) sind  $p_i^\bullet$ ,  $d_i^\bullet$  und  $c_i^\bullet$  Konstanten, da die entsprechenden Energieterme direkt proportional zu  $\mathcal{K}_i$  sind, während die anderen Effizienzen nicht nur von  $\mathcal{K}_i$  sondern auch von den Tripelkorrelationen  $\overline{a_i a_j a_k}$  abhängen (siehe Tab. 3.4).

Die 5 Effizienzen addieren sich wegen (3.39) für jede Mode zu 0. Die relative Gewichtung lässt Rückschlüsse auf die katalytische Rolle der Mode zu, d.h. woher die Mode ihre Energie nimmt und wohin diese weiter fließt.

Abschließend sei noch auf eine Verwandtheit dieser modalen Energiefluss-Betrachtung mit der linearen Stabilitätstheorie hingewiesen. Wäre  $\mathbf{u}_i$  eine reelle Stabilitätseigenmode, dann ließe sich — unter Vernachlässigung des Druckterms — mit

$$2\sigma_i = \frac{\mathcal{P}_i + \mathcal{D}_i + \mathcal{C}_i}{\mathcal{K}_i} = p_i^\bullet + c_i^\bullet + d_i^\bullet$$

die Wachstumsrate dieser Mode bestimmen. Bei oszillatorischen Modenpaaren müssten die Anteile beider Moden aufsummiert werden. Diese Verwandtheit unterstützt die Interpretation der Energiefluss-Effizienzen als termabhängige Wachstumsraten.

## 4. Analyse und Modellierung des Nachlaufs eines Kreiszylinders

Der Nachlauf eines Kreiszylinders ist als Prototyp einer absolut instabilen Strömung mit selbst-erregten, amplitudenbeschränkten Oszillationen seit über hundert Jahren Gegenstand intensiver Forschung. Der periodische Nachlauf von Zylindern kann zu Vibrationen und zu Lärm führen und ist in vielen praktischen Konfigurationen unerwünscht. Beispiele sind Umströmungen von Schornsteinen, Säulen von Bohrtürmen, Brücken, Tragflügeln in der Hochauftriebs-Konfiguration und dem U-Boot-Turm. Die Unterdrückung der Wirbelstraße mit passiven und aktiven Methoden ist daher Ziel verschiedener Beeinflussungsstrategien. In einigen Anwendungen hat die Wirbelstraße erwünschte Eigenschaften. So basieren Wärmetauscher auf den guten Mischungseigenschaften und Vortex Counters als Durchflussmesser auf der Periodizität des Zylindernachlaufs mit nahezu konstanter Strouhal-Zahl.

Der Nachlauf des Kreiszylinders ist charakterisiert durch die mit der Anströmgeschwindigkeit  $U$  und dem Durchmesser  $D$  gebildete Reynolds-Zahl  $Re$ . Für  $Re < 47$  bleibt der Nachlauf stationär. Ab  $Re = 47$  wird die stationäre Kreiszyylinder-Umströmung instabil in einer superkritischen Hopf-Bifurkation [68, 73, 131]. Diese Instabilität führt zu einem periodischen 2D Ablösen von Wirbeln mit alternierendem Drehsinn in eine von Kármán'sche Wirbelstraße. Die Wirbelstraße bleibt die dominierende Grobstruktur bis zu beliebig hohen Reynolds-Zahlen.

Ab  $Re = 186$  wird die zweidimensionale Wirbelstraße von verschiedenen dreidimensionalen Strukturen überlagert [4, 132]. Die erste 3D Instabilität führt in einer schwach hysteretischen Bifurkation zu einer periodischen A-Mode mit einer spannweiten Wellenlänge von ca. 4 Durchmessern. Ab  $Re = 230$  setzt sich die B-Mode als weitere Instabilitätsmode in einer stark hysteretischen Bifurkation mit einer spannweiten Wellenlänge von ca. 1 Durchmesser durch. Mit zunehmender Reynolds-Zahl erfährt die Wirbelstraße eine Reihe von Veränderungen, die periodische Grobstruktur bleibt aber unverändert das Markenzeichen dieser Strömung (siehe die Übersichtsartikel von [76, 77, 129] und das Buch [130]).

Nach Beschreibung der Simulation (§4.1), werden niederdimensionale Darstellungen von drei periodischen Zuständen der Wirbelstraße untersucht: dem zweidimensionalen laminaren Nachlauf (§4.2), der A-Mode (§4.3) und der B-Mode (§4.4). Abschließend wird auf die Galerkin-Modellierung transienter und eingeschwungener Wirbelstraßen eingegangen (§4.5).

## 4.1 Direkte numerische Simulation

Die direkte numerische Simulation des Kreiszyylinder-Nachlaufs wird mit einer Spektral-Elemente-Diskretisierung durchgeführt. Der verwendete Navier-Stokes-Löser *NekTar*<sup>1</sup> wurde in der Arbeitsgruppe von Prof. Karniadakis entwickelt, und an der TU Dresden für hochauflösende, dreidimensionale Kreiszyylinder-Simulationen weiterentwickelt [93]. Diese Simulation ist über den ganzen transitionellen Reynolds-Zahl-Bereich in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment [128]. Die Simulation wurde von Dr. G. Mutschke für die Wellenlänge der A-Mode ( $L_z = 4$ ), und B-Mode ( $L_z = 1$ ) adaptiert. Auf diese Weise wurden rein periodische Transitionsmoden berechnet und die aperiodischen, gemischten Zustände, wie sie bei Wellenlängen von 10 und mehr Durchmessern auftreten, vermieden.

Die Simulation basiert auf 186 spektralen Elementen hoher Ordnung (siehe Abb. 4.1). Die Diskretisierung in spannweitere Richtung erfolgt mit Fourier-Moden. Am vorderen und seitlichen Außenrand wird die Anströmung  $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$  als Dirichlet'sche Randbedingung vorgegeben. Die Ausströmung wird mit einer konvektiven Bedingung behandelt.

Für die Galerkin-Modellierung wird jedes spektrale Element mit  $24 \times 24$  Zellen in der  $x, y$ -Ebene und 32 Zellen in der  $z$ -Ebene diskretisiert. Das gesamte 3D Rechengebiet setzt sich aus 3.4 Millionen Zellen zusammen. Die Differenziation und Integration wird analytisch mit einer Lagrange-Interpolation 4-ter Ordnung für das Strömungsfeld durchgeführt.

Neben dem Spektral-Elemente-Verfahren wird eine Finite-Elemente-Simulation für eine Untersuchung der Transienten verwendet. Dieser FEM Navier-Stokes-Löser von Prof. M. Morzyński ist von 3-ter Genauigkeitsordnung in Raum und Zeit und diskretisiert ein Gebiet auf einem unstrukturierten Gitter mit 15838 Dreieckselementen (siehe Abb. 4.2 und [80] für weitere Informationen). Auf diesem Verfahren basieren die Eigenmoden einer globalen Stabilitätsanalyse [68], welche Eingang in die hier beschriebene Galerkin-Modellierung findet. Zur Vermeidung von Interpolationsfehlern wurde die Analyse und Modellierung immer auf dem Gitter der zu Grunde liegenden Daten durchgeführt.

---

<sup>1</sup><http://www.cfm.brown.edu/people/tcew/nectar.html>

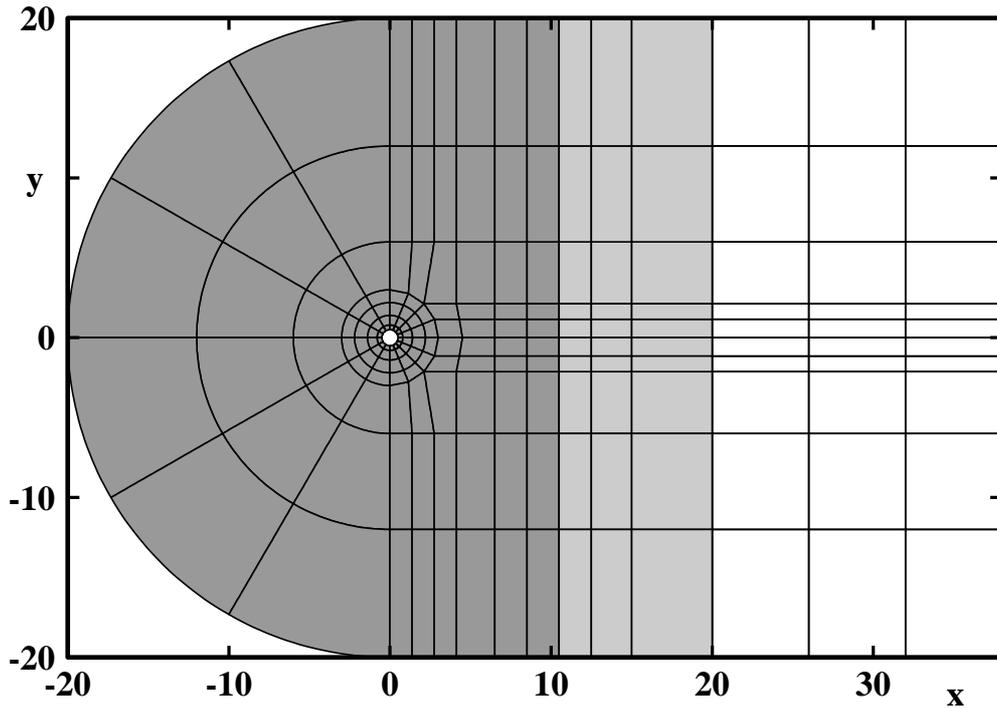


Abbildung. 4.1: Spektral-Elemente-Gitter für die direkte numerische Simulation des Kreiszyylinder-Nachlaufs. Jedem Viereck entspricht ein spektrales Element. Für die Analyse und Galerkin-Modellierung werden drei Gebiete eingeführt. Gebiet I erstreckt sich bis  $x = 10.5$  und ist dunkelgrau hinterlegt. Gebiet II beinhaltet den Nachlauf bis  $x = 20$  und enthält die dunkel- und hellgrauen Elemente. Das Gebiet III entspricht dem gesamten Rechengebiet ( $x \leq 38$ ).

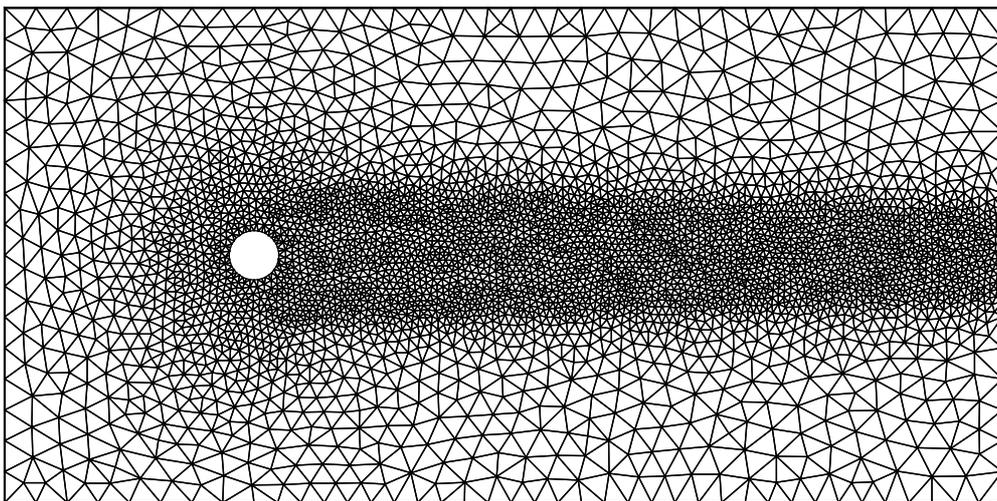
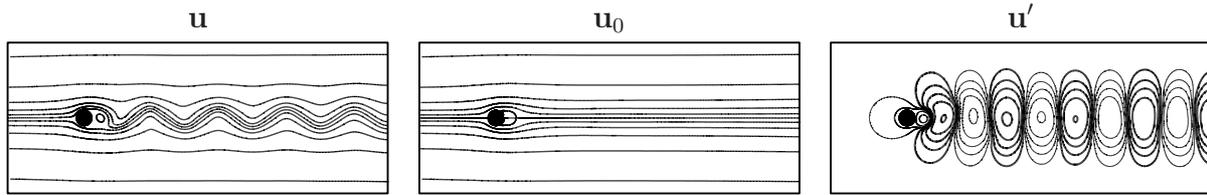


Abbildung. 4.2: Unstrukturiertes Gitter für die FEM-Simulation des Kreiszyylinder-Nachlaufs.



**Abbildung. 4.3:** Reynolds-Zerlegung des laminaren Kreiszyylinder-Nachlaufs bei  $Re = 200$ . Von links nach rechts sind die Stromlinien eines instantanen Strömungsfeldes  $\mathbf{u}$ , der zeitgemittelten Strömung  $\mathbf{u}_0$ , und der zugehörigen Fluktuation  $\mathbf{u}'$  dargestellt. Die gezeigten Stromlinien entsprechen den Stromfunktions-Werten  $\Psi = 0, \pm 0.1, \pm 0.2, \pm 0.5, \pm 1$  und  $\pm 2$ , wobei der Zylinder durch  $\Psi = 0$  beschrieben wird.

## 4.2 Niederdimensionale Beschreibung des laminaren Nachlaufs

Die zweidimensionale Navier-Stokes-Lösung konvergiert ab  $Re = 47$  für beliebige Anfangsbedingungen gegen eine periodische Strömung bis zu einer Reynolds-Zahl von ca. 800. Für größere Reynolds-Zahlen wird eine neue Frequenz durch Kelvin-Helmholtz-Wirbel an der oberen und unteren Scherschicht eingeführt [11].

### 4.2.1 Karhunen-Loève-Zerlegung

Abbildung 4.3 zeigt eine periodische Nachlaufströmung eines Kreiszyinders in einem Untergebiet bei  $Re = 200$ . Die Strouhal-Zahl  $St = f D/U$  beträgt 0.197, die Periode lautet  $T = 1/St = 5.07$ .

Die Karhunen-Loève-Zerlegung basiert auf 64 Schnappschüssen zu den Zeitpunkten  $t_m = (m/64)T$ ,  $m = 1, 2, \dots, 64$ . Abbildung 4.4 zeigt die ersten Karhunen-Loève-Eigenwerte  $\lambda_i$ , Abb. 4.5 die ersten 8 Moden  $\mathbf{u}_i$ , und Abb. 4.6 ausgewählte Fourier-Koeffizienten  $a_i(t)$ . In guter Näherung ergibt die Karhunen-Loève-Zerlegung sehr ähnliche Resultate wie eine zeitliche Fourier-Zerlegung modulo Phasenverschiebung. Moden  $i = 1, 2$  beschreiben die erste Harmonische,  $i = 3, 6$  die zweite Harmonische,  $i = 4, 5$  die dritte Harmonische, und danach  $i = 2n-1, 2n$  die  $n$ -te Harmonische. Mit zunehmender Frequenz sinkt die Energie  $\lambda_i/2$  jeder Mode. Moden gleicher Frequenz haben ähnliche Energie, wie in dem Rechenbeispiel aus §2.3. Jedes Modenpaar mit gleicher Kreisfrequenz  $2\pi n/T$  beschreibt eine laufende Welle mit der Phasengeschwindigkeit

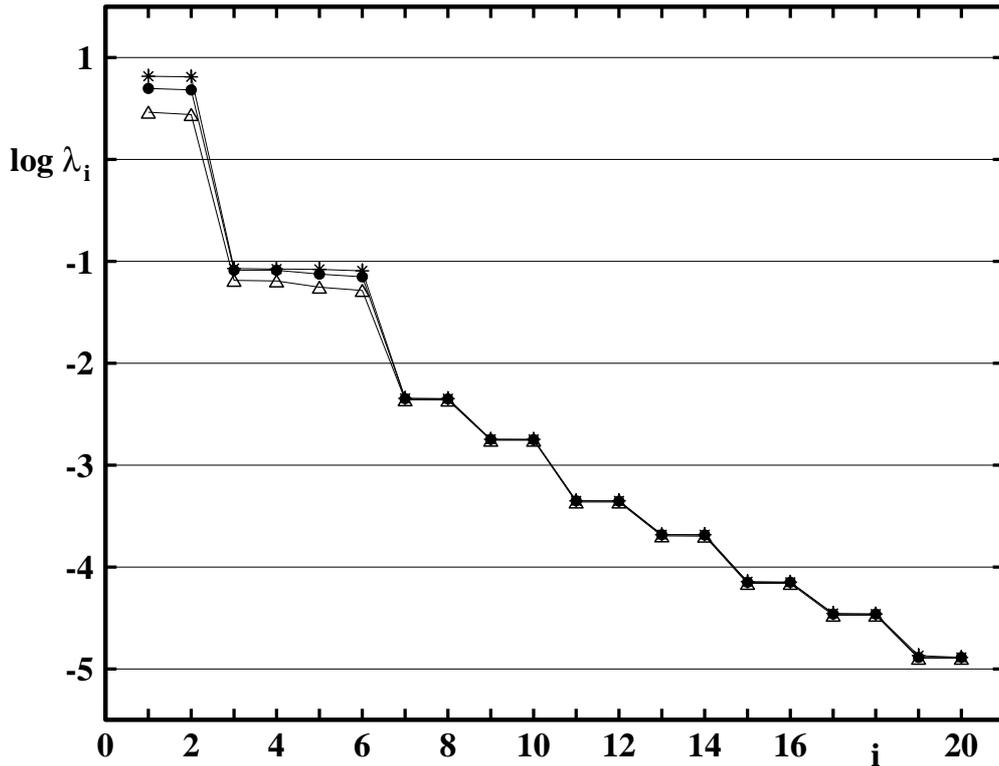


Abbildung. 4.4: Karhunen-Loève-Eigenwert-Spektren für den laminaren Nachlauf bei  $Re = 200$  (siehe Abb. 4.3). Dargestellt ist  $\log \lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 20$  für die Gebiete I ( $\Delta$ ), II ( $\bullet$ ), und III ( $*$ ).

der ersten Harmonischen. Entsprechend ist die charakteristische Wellenzahl proportional zu  $n$ .

Auffallend an dem Treppenverlauf in Abb. 4.4 ist, dass die Moden 3–6 ähnliche Energien haben und höhere Moden in nahezu geometrischer Progression abfallen. Dieser Verlauf wurde auch in [20] für  $Re = 100$  und in [58] für die A-Mode bei  $Re = 185$  beobachtet. Auch experimentelle Karhunen-Loève-Zerlegungen bei  $Re = 5000$  zeigen dieses Charakteristikum [M. BREDE 2005, private Mitteilung]. Eine Erklärungsmöglichkeit wird in nachfolgender Energiefluss-Analyse geboten. Das asymptotische, nahezu konstante Verhältnis der Energie von  $n$ -ter Harmonischen zu  $n + 1$ -ter Harmonischen ist in Übereinstimmung mit einer Theorie für periodische Strömungen [21].

Die höheren Harmonischen werden von der von Kármán'sche Wirbelstraße durch nichtlineare Wechselwirkungen induziert und sind auf den zylindernahen Bereich begrenzt. Daher nähern sich die Eigenwerte  $\lambda_i$  für die Gebiete I, II und III mit zunehmenden Index  $i$  an. Die periodische Grundstruktur der von Kármán'schen Wirbelstraße erstreckt sich über das gesamte Rechengebiet

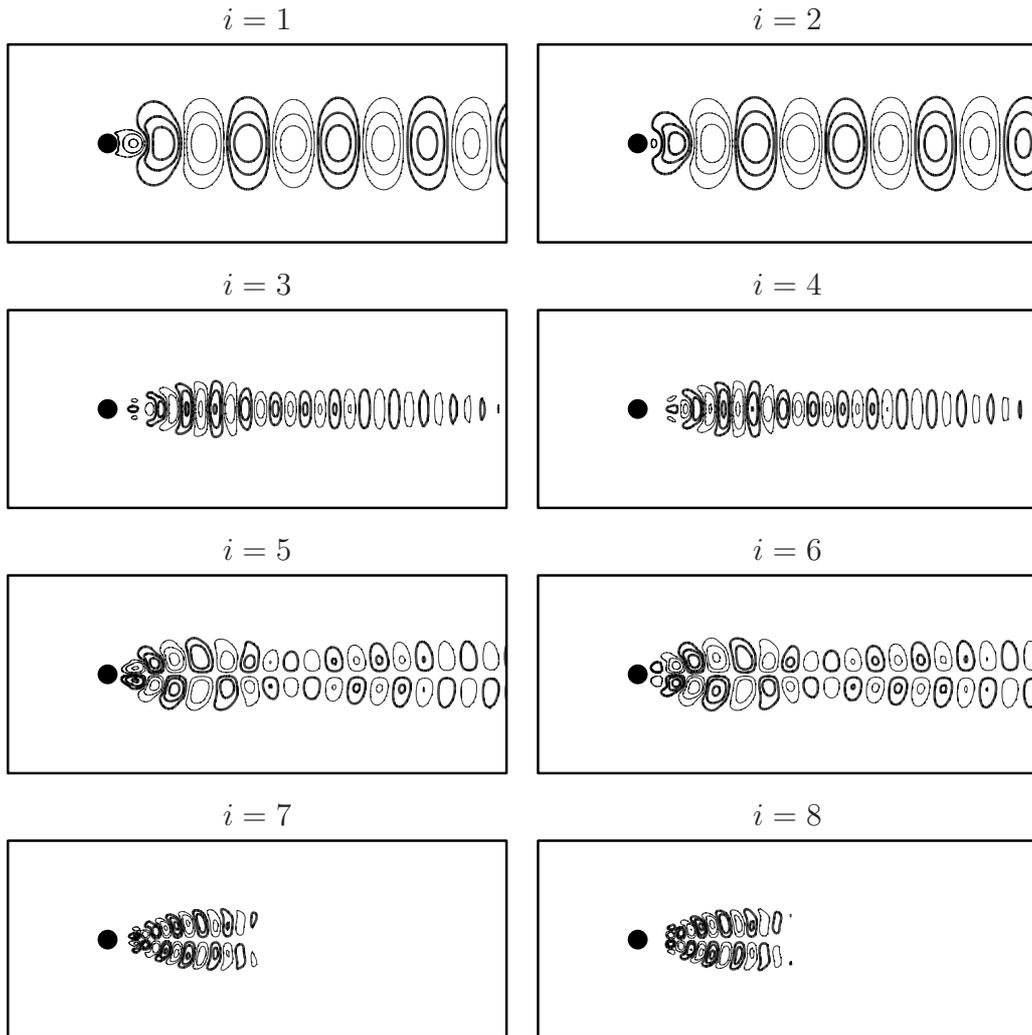


Abbildung. 4.5: Karhunen-Loève-Moden  $\mathbf{u}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$  des laminaren Nachlaufs bei  $Re = 200$  für das Gebiet II. Die dargestellten Stromlinien entsprechen den Stromfunktions-Werten  $\pm\Psi = 0.001, 0.002, 0.005, 0.01, 0.02, 0.1, 0.2$  jeweils von 'außen' nach 'innen'. Positive Werte sind durch dickere Linien markiert. Auf dem Kreiszyylinder gilt  $\Psi = 0$ .

und bedingt ein Ansteigen von  $\lambda_{1,2}$  mit der Gebietsgröße.

#### 4.2.2 Energiefluss-Analyse

Die Gesamtbilanz der Energiefluss-Terme ist in Abb. 4.7 für die Gebiete I–III dargestellt. Die Produktion ist — wie zu erwarten — die mit Abstand größte Quelle. Überraschend ist zunächst, dass die Produktion mit zunehmender Gebietsgröße abnimmt. Dies beinhaltet, dass im Fernfeld

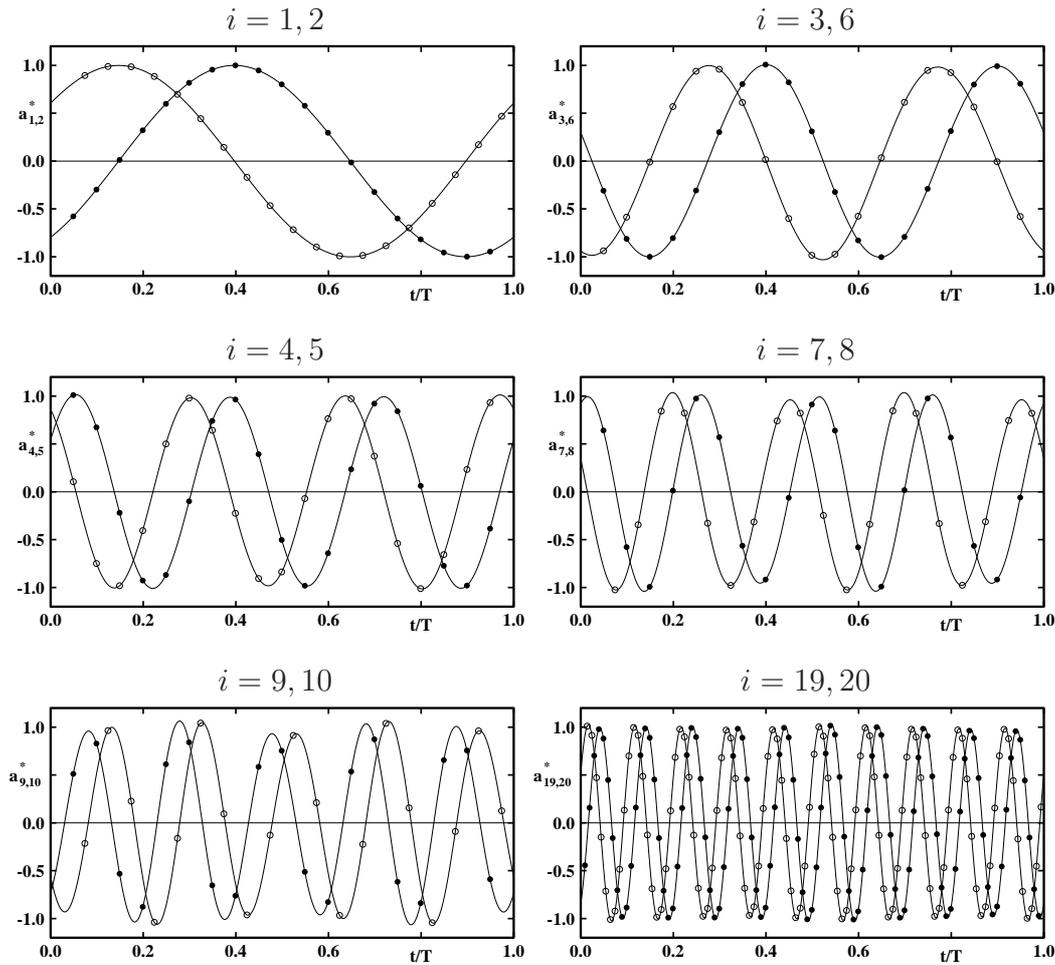


Abbildung. 4.6: Zeitliche Entwicklung der Fourier-Koeffizienten des laminaren Nachlaufs der Karhunen-Loève-Zerlegung aus Abb. 4.5. Die Zeit  $t$  wird mit der Periode  $T$  normalisiert und die Koeffizienten werden mit der Amplitude skaliert,  $a_i^* := a_i/\sqrt{2\lambda_i}$ . Jede Unterabbildung zeigt ein Paar von Koeffizienten mit gleicher dominierender Frequenz. Die gewählten Indizes  $i$  sind an der Ordinate und am Bildrand angegeben, wobei die Daten zu dem niedrigeren und höheren Index durch  $(\bullet)$  bzw.  $(\circ)$ , respektive, markiert werden.

die Fluktuation Energie an die mittlere Strömung zurück gibt. Solche Phänomene sind keine Seltenheit [118] und korrespondieren gut mit der Beobachtung einer Reduktion des Nachlaufdefizits mit einer Reenergetisierung der mittleren Strömung.

Die Dissipation nimmt mit der Gebietsgröße zu, d.h. die in Zylindernähe produzierte Fluktuationsenergie wird zum einen der inneren Energie des Fluids und zum anderen der mittleren Strömung zugeführt.

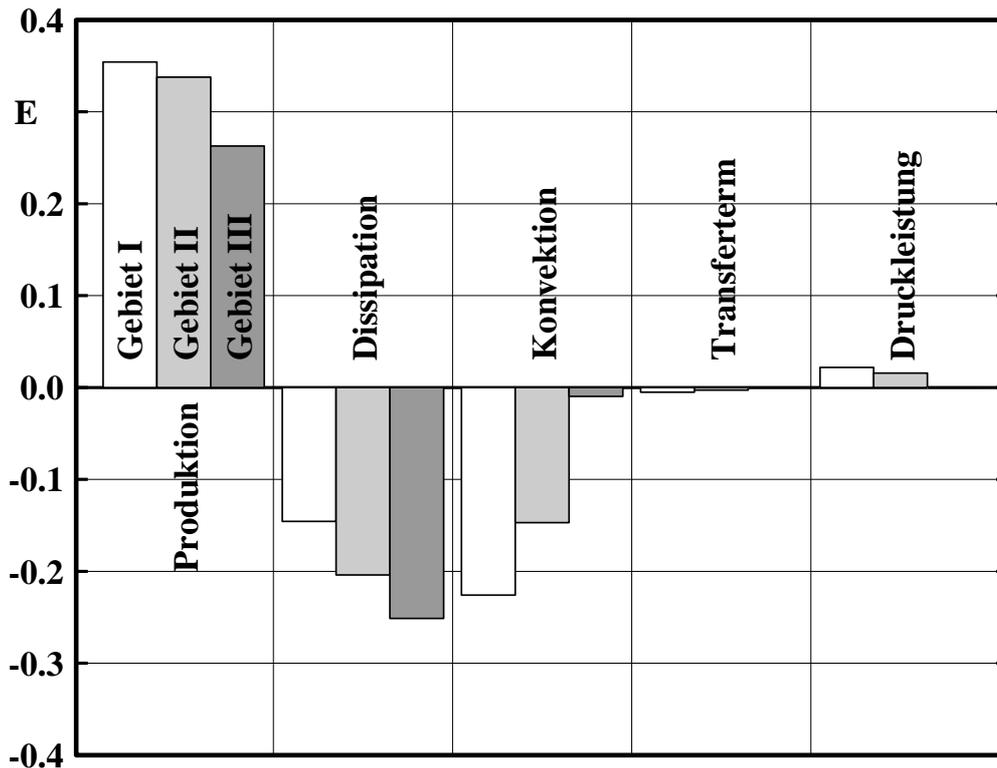


Abbildung. 4.7: Energiefluss-Terme für den laminaren Nachlauf bei  $Re = 200$ . Im Histogramm sind die fünf Bilanz-Terme für die Fluktuationsenergie dargestellt. Die Terme für die Gebiete I, II und III sind als weiße, hellgraue und dunkle Balken dargestellt, respektive.

In guter Näherung konvektiert die Differenz zwischen Produktion und Dissipation aus dem Ausströmrand des betrachteten Gebiets, was durch den Konvektivterm beschrieben ist. Im Gebiet I bis  $x = 10.5$  dominiert die Konvektion über der Dissipation. In dem gesamten Rechengebiet III, ist der Konvektivterm vernachlässigbar, da die Wirbelstraße weitestgehend abgeklungen ist.

Der Transferterm ist in allen Gebieten vernachlässigbar. Die Druckleistung stellt für die Gebiete I und II eine Quelle dar. Der Druck trägt mit anderen Worten dazu bei, dass Fluktuationsenergie im zylindernahen Gebiet bleibt.

Die Summe der 5 Energierterme addiert sich für alle drei Gebiete zu Null mit einem Fehler von weniger als einem Promille bezogen auf die Produktion. Dieses Residuum ist nach den Erfahrungen des Autors sehr gering und ist ein Indiz für die Güte der Spektral-Elemente-Simulation. Der Residuumsbetrag bleibt für alle Spektral-Element- und Finite-Differenzen-Simulationen vorliegender Arbeit unter einem 1000stel der Produktion.

Die modalen Beiträge zu den Energiefluss-Termen werden in Abb. 4.8 aufgelöst. Produktion,

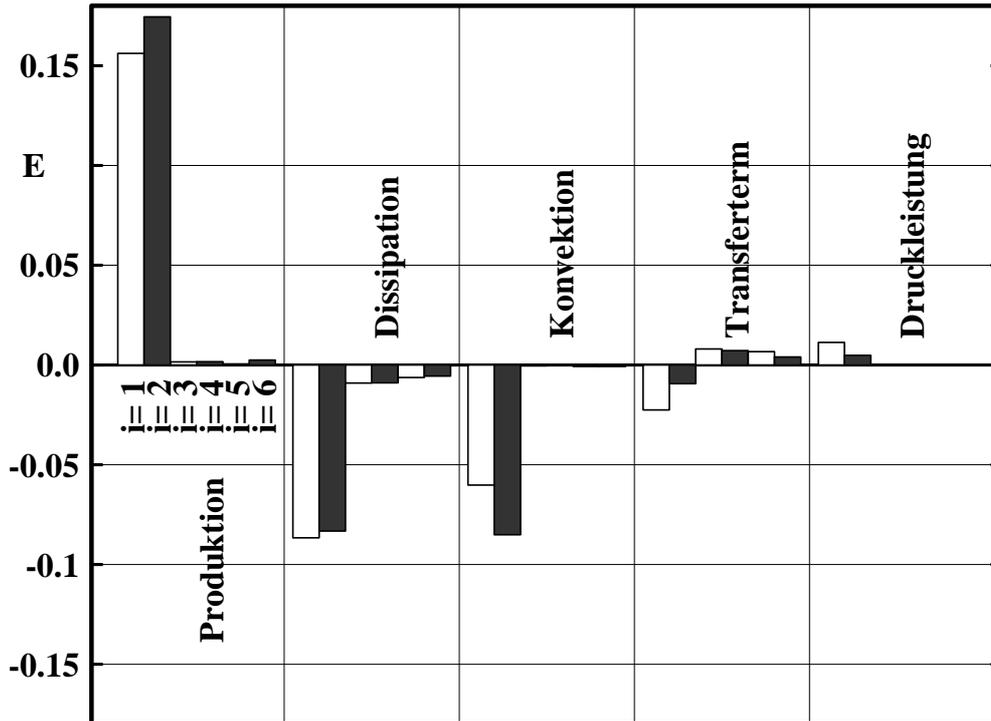


Abbildung. 4.8: Modale Energiefluss-Analyse des laminaren Nachlaufs. Im Histogramm sind die Einzelbeiträge der ersten 6 Karhunen-Loève-Moden zu den Energietermen aus Abb. 4.7 aufgelöst. Die Beiträge der höheren Moden sind unbedeutend.

Dissipation, Konvektion und Druckleistung werden maßgeblich durch die ersten beiden Moden charakterisiert. Die Unterschiede der modalen Beiträge korrelieren mit einer zeitlichen Veränderung der instantanen Werte der Energietermine.

Der Transferterm zeigt den aus der Energiefluss-Kaskade bekannten Sachverhalt, dass die 'produktiven' Moden Energie an die 'unproduktiven' Moden abgeben. Ähnliche Beobachtungen wurden für die transitionelle Grenzschicht gemacht [95, 96].

Abschließend seien die Energiefluss-Effizienzen betrachtet (Abb. 4.9). Die höheren Moden  $i = 3, 4, \dots, 10$  saugen aus der mittleren Strömung ähnlich effizient Energie wie die von Kármán-Moden  $i = 1, 2$ . Hierbei spielt die Produktion in der Scherschicht eine wichtige Rolle. Jedoch wird die Energie viel schneller dissipiert, sodass die Moden ihr Energieniveau in erster Linie dem positiven Transferterm verdanken. Die höheren Moden spielen die Rolle des Katalysators der Energie-Dissipation von der grobskaligen Fluktuation in das Wärmebad. Im Vergleich mit den anderen Termen spielen die Produktions- und Konvektions-Effizienz eine geringe Rolle.

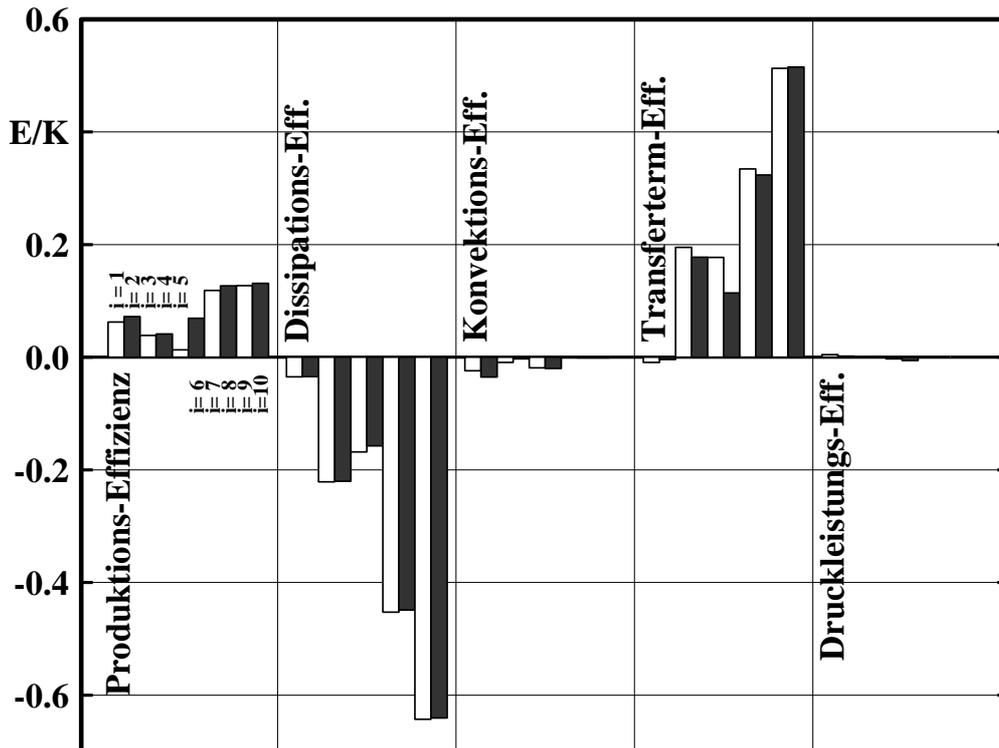


Abbildung. 4.9: Modale Energiefluss-Effizienz der Moden des laminaren Nachlaufs. Die Einzelbeiträge der ersten 10 Karhunen-Loève-Moden aus der Energiefluss-Analyse zu Abb. 4.8 werden normalisiert mit der modalen kinetischen Energie  $\mathcal{K}_i$ .

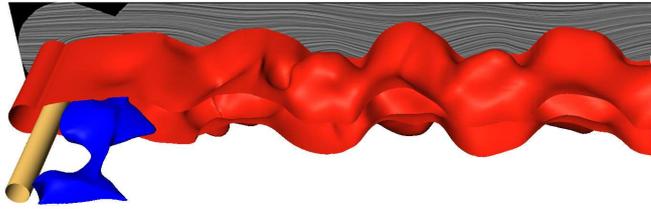
### 4.3 Niederdimensionale Beschreibung der A-Mode

Die A-Mode kann modelliert werden als selbsterregte, amplitudenbeschränkte 3D Floquet-Instabilität auf der 2D periodischen Strömung [5]. Sie stellt sich als stabiler Zustand bei  $Re = 200$  und  $L_z = 4$  ein. In [58] wird die A-Mode numerisch berechnet bei nahezu gleicher Wellenlänge  $L_z = 4$  aber etwas geringerer Reynolds-Zahl  $Re = 185$ . Im Experiment kann die Mode beobachtet werden bei großem Verhältnis von Zylinderlänge zu Durchmesser und bei sorgfältig gewählten Endbedingungen [12, 128, 132].

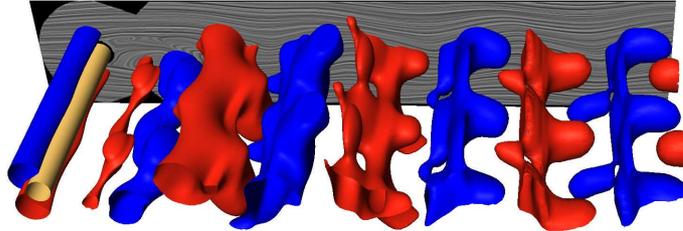
#### 4.3.1 Karhunen-Loève-Zerlegung

Abbildung 4.10 zeigt einen Schnappschuss der A-Mode. Deutlich erkennbar ist die starke spannungsweitige Deformation der von Kármán-Wirbel, wie sie bereits im Experiment mit Rauchvisualisierungen von [128] und aus PIV-Daten von [12] beobachtet wurden.

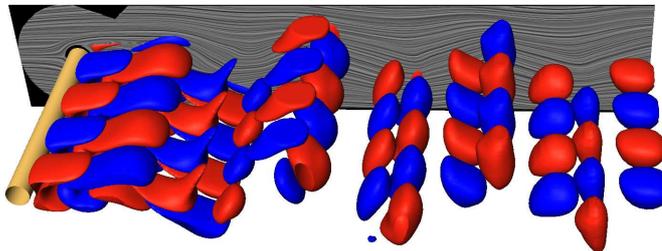
$u = -0.1 \text{ \& } 0.8$



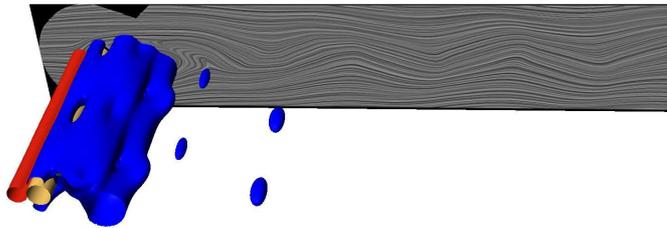
$v = \pm 0.25$



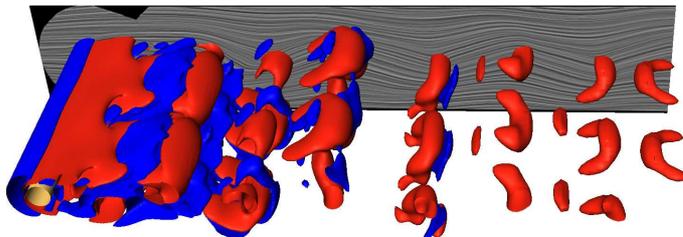
$w = \pm 0.1$



$p = \pm 0.3$



$Q = \pm 0.5$



**Abbildung. 4.10:** Schnappschuss der A-Mode bei  $Re = 200$  mit zwei spannweiten Wellenlängen. Im Hintergrund sind die  $u, v$ -Komponenten in der  $z = 8D$  Ebene als graue Integrallinien visualisiert. Der Zylinder ist in goldfarbenem Ton gezeigt. In den fünf Unterbildern werden Isoflächen für  $u, v, w, p$  und den  $Q$ -Parameter dargestellt, respektive. Isoflächen zu positiven (negativen) Werten sind rot (blau). Die zugehörigen Isoflächen-Werte sind  $u = 0.8$  (spannweitig verkürzt),  $u = -0.1$ ,  $v = \pm 0.25$ ,  $w = \pm 0.1$ ,  $p = \pm 0.3$  und  $Q = \pm 0.5$ .

Die Periode der Strömung beträgt  $T = 6.00$ , ist also um 18% geringer als die der 2D Strömung bei gleicher Reynolds-Zahl. Die Verlangsamung der Wirbelablösung ist ein Charakteristikum der A-Mode.

Eine aufschlussreiche Größe für die Visualisierungen der Wirbelstruktur ist der  $Q$ -Parameter (siehe Abb. 4.10). Dieser sogenannte Okubo-Weiss-Parameter ist der Quellterm der Druck-Poisson-Gleichung. Ein positiver Wert ist somit notwendige Bedingung für ein Druckminimum, welches als Indikator für eine Wirbelstruktur gilt. Ein negativer Wert ist charakteristisch für Sattelpunkte. Da die Strömung sich in den Sattelpunkten gut mischt und in den Wirbeln wenig, wird dieser Parameter gerne auch für Mischungscharakterisierungen verwendet [81].

Die Karhunen-Loève-Zerlegung wird mit 32 äquidistanten Schnappschüssen aus einer Periode durchgeführt. In Abbildung 4.11 werden die Eigenwerte der A-Mode mit der zugehörigen 2D Strömung aus §4.2.1 verglichen. Die kinetische Energie pro spannweite Längeneinheit ist bei dem 3D Nachlauf deutlich geringer. Jedoch führen bei der A-Mode die verstärkten nichtlinearen Prozesse durch die spannweite Deformation der Wirbelstraße zu einem langsameren Abfall der Karhunen-Loève-Eigenwerte.

Die ersten Karhunen-Loève-Moden sind in Abb. 4.12 dargestellt. Die Moden können als spannweitig deformierte Pendants zu den 2D Moden gleicher Frequenz betrachtet werden. Die zugehörigen Fourier-Koeffizienten zeigen das aus dem 2D Nachlauf bekannte periodische Verhalten.

### 4.3.2 Energiefluss-Analyse

In Abbildung 4.13 werden die Energiebilanz-Terme der A-Mode und der 2D Strömung verglichen. Produktion, Dissipation, Konvektion und Druckleistung (pro spannweite Längeneinheit) sind bei der A-Mode deutlich geringer als bei der 2D Strömung, was wegen der geringeren Energie erwartet werden durfte. Die Dissipation spielt als Energiefluss-Senke bei der A-Mode eine wichtigere Rolle, was mit der zusätzlichen Dissipation durch die spannweite Deformation erklärt werden kann.

Die modalen Energiefluss-Beiträge und -Effizienzen folgen qualitativ den bei der 2D Strömung festgestellten Gesetzmäßigkeiten.

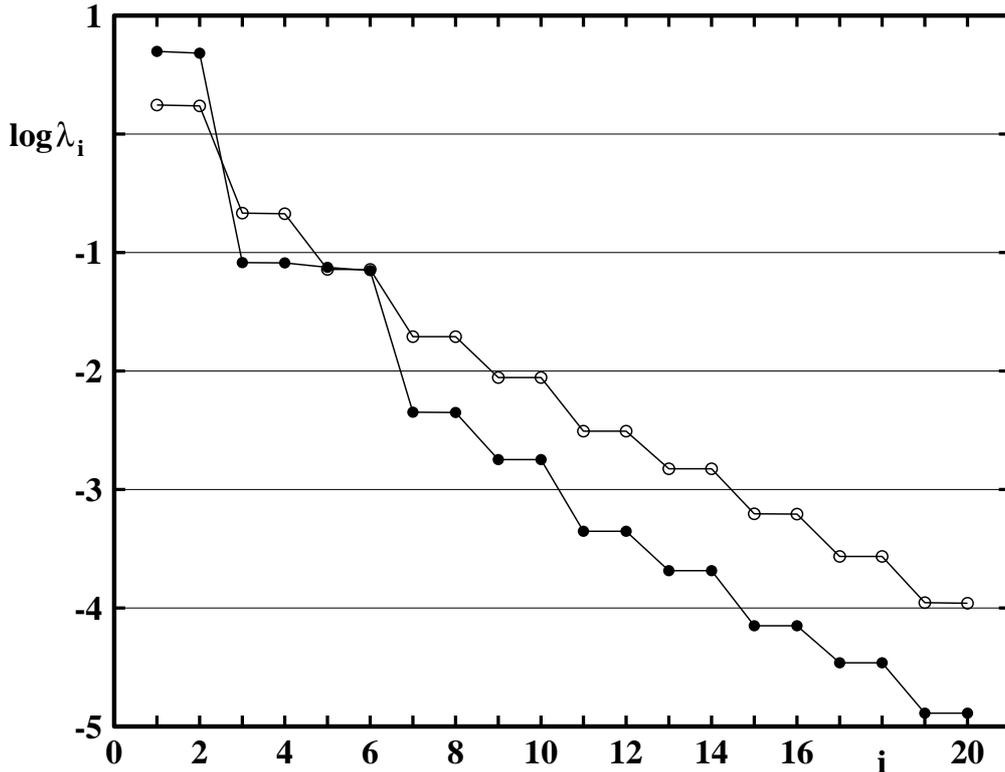


Abbildung. 4.11: Karhunen-Loève-Eigenwert-Spektren für die A-Mode aus Abb. 4.10 und für die entsprechende 2D Strömung zum Vergleich. Die Symbole repräsentieren Werte von  $\log \lambda_i$  für die Moden  $i = 1, \dots, 20$  des 2D ( $\bullet$ ) und 3D Nachlaufs ( $\circ$ ) — beide im Gebiet II und für  $Re = 200$  berechnet. Zur besseren Vergleichbarkeit wurden die Werte des 3D Nachlaufs mit der spannwitigen Wellenlänge ( $L_z = 4$ ) normiert (siehe Gl. (3.7)).

## 4.4 Niederdimensionale Beschreibung der B-Mode

Die B-Mode kann — analog zur A-Mode — als 3D Instabilität auf der 2D periodischen Wirbelstraße modelliert werden [5], tritt jedoch bei einer höheren Reynolds-Zahl mit geringer spannwitigen Wellenlänge von ca. 1 auf. Die 'reine' periodische B-Mode wird hier als Attraktor bei einer Reynolds-Zahl von 300 mit  $L_z = 1$  berechnet. Im Experiment ist die B-Mode die dominierende spannwitige Struktur bei der gewählten Reynolds-Zahl [12]. Im Unterschied zum Experiment [128] und einer direkten Simulation mit  $L_z = 20$  [132] werden zeitlich irreguläre Fluktuationen durch Strukturen größerer Wellenlänge hier nicht aufgelöst.

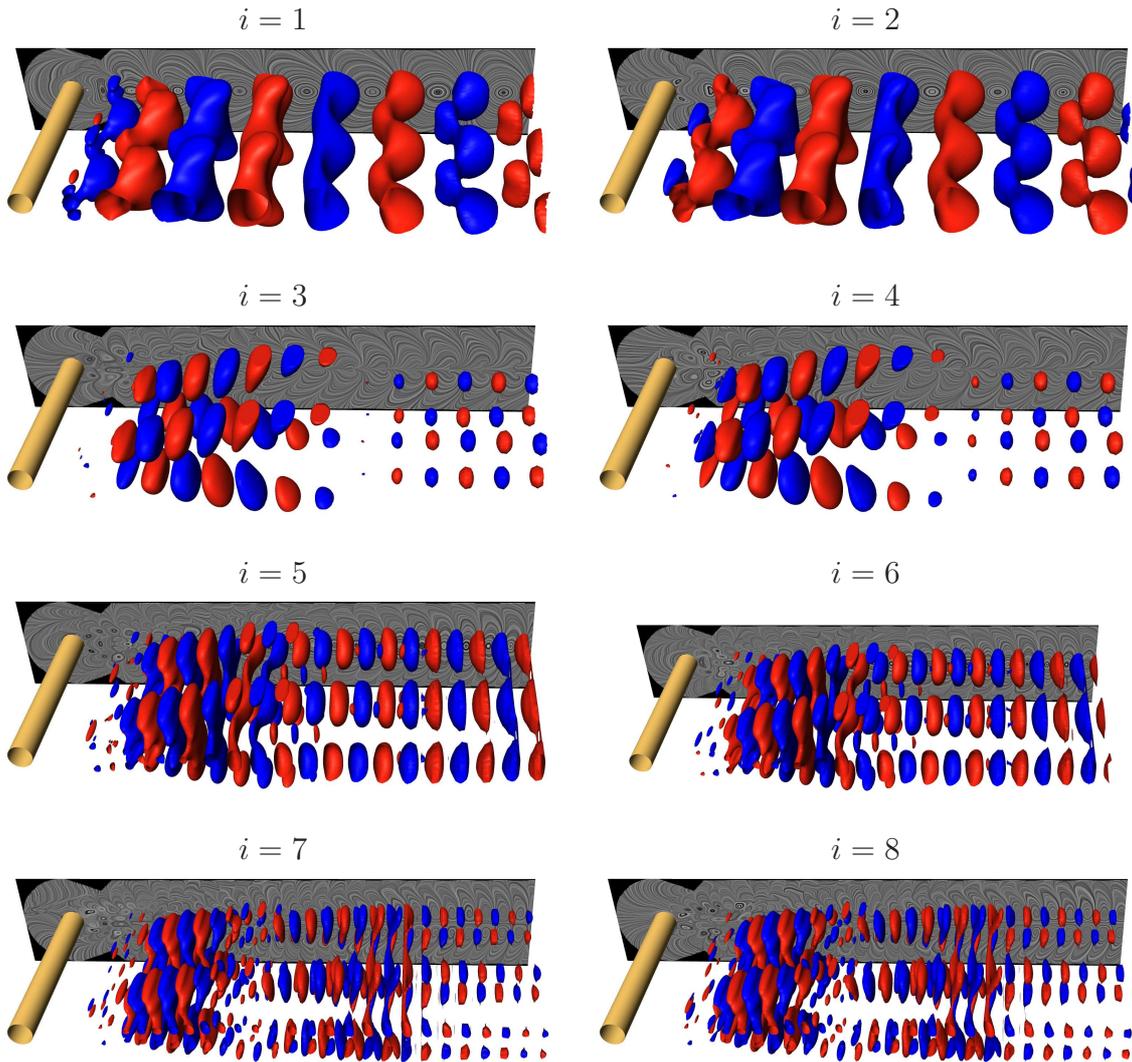


Abbildung. 4.12: Karhunen-Loève-Moden  $\mathbf{u}_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ , der A-Moden des transitionellen Nachlaufs bei  $Re = 200$ . Die Visualisierung ist wie in Abb. 4.10 mit den Isoflächen von  $v = \pm 0.065$ .

#### 4.4.1 Karhunen-Loève-Zerlegung

Abbildung 4.14 zeigt einen Schnappschuss der B-Mode aus der Navier-Stokes-Simulation. Die Strömung ist deutlich zweidimensionaler als die A-Mode. Ein Charakteristikum der B-Mode ist die aus der  $w$ -Komponente und dem  $Q$ -Parameter erkennbaren Rippenwirbel zwischen den von Kármán-Wirbeln.

Die vorherrschende Zweidimensionalität wird auch durch einen Vergleich der Eigenwert-Spektren (Abb. 4.15) mit der zugehörigen 2D Strömung bei  $Re = 300$  bestätigt. Die Karhunen-Loève-

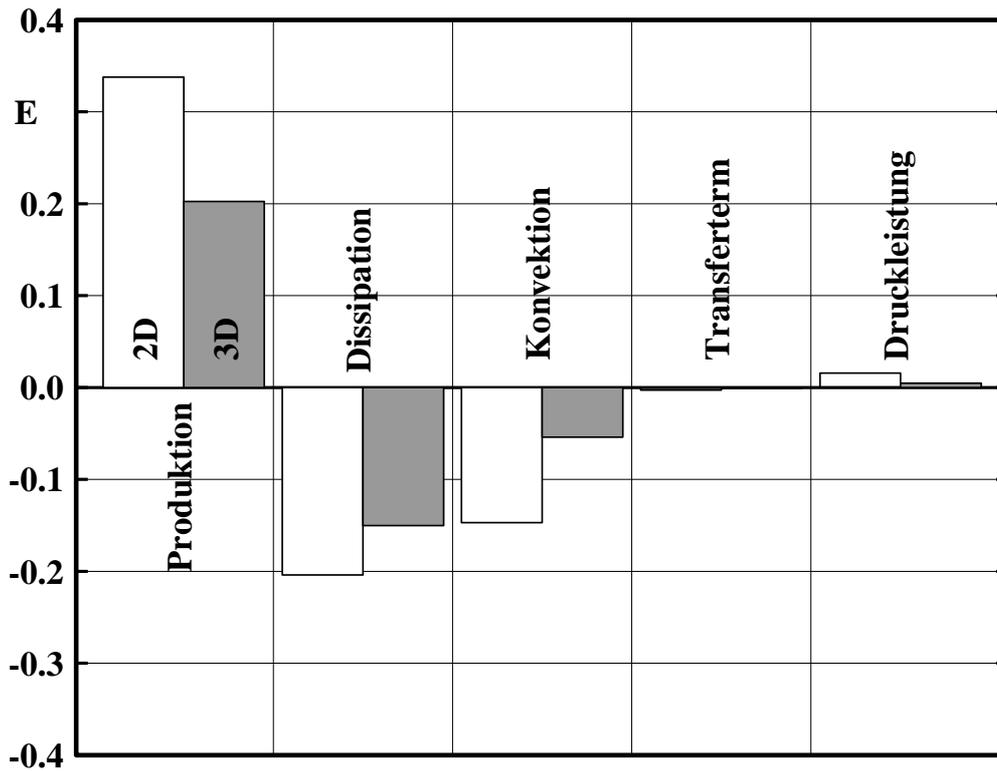


Abbildung. 4.13: Energiefluss-Terme für den 2D und 3D Nachlauf bei  $Re = 200$ . Im Histogramm sind die fünf Bilanz-Terme für die Fluktuationsenergie im Gebiet II dargestellt. Die weißen und dunklen Balken beziehen sich auf 2D Lösung bzw. auf die A-Mode, respektive.

Moden (Abb. 4.16) sind den Moden des 2D Nachlaufs (hier nicht gezeigt) vergleichbar.

#### 4.4.2 Energiefluss-Analyse

Die Veränderung der Energiefluss-Terme durch die Dreidimensionalität der B-Mode (Abb. 4.17) fällt geringer aus als bei der A-Mode, da die 2D und 3D Strömungen ähnlicher sind. Die modalen Energiefluss-Effizienzen verhalten sich analog zu den bisher diskutierten Scherströmungen.

### 4.5 Niederdimensionale Galerkin-Modellierung

In diesem Abschnitt soll auf die Modellierung der Dynamik eingegangen werden. Prinzipiell kann die periodische Lösung des dynamischen Modells nicht mehr Informationen geben, als die zugehörige Analyse der Simulations-Datensätze. Ein potenzieller Vorteil der Modellierung bei kom-

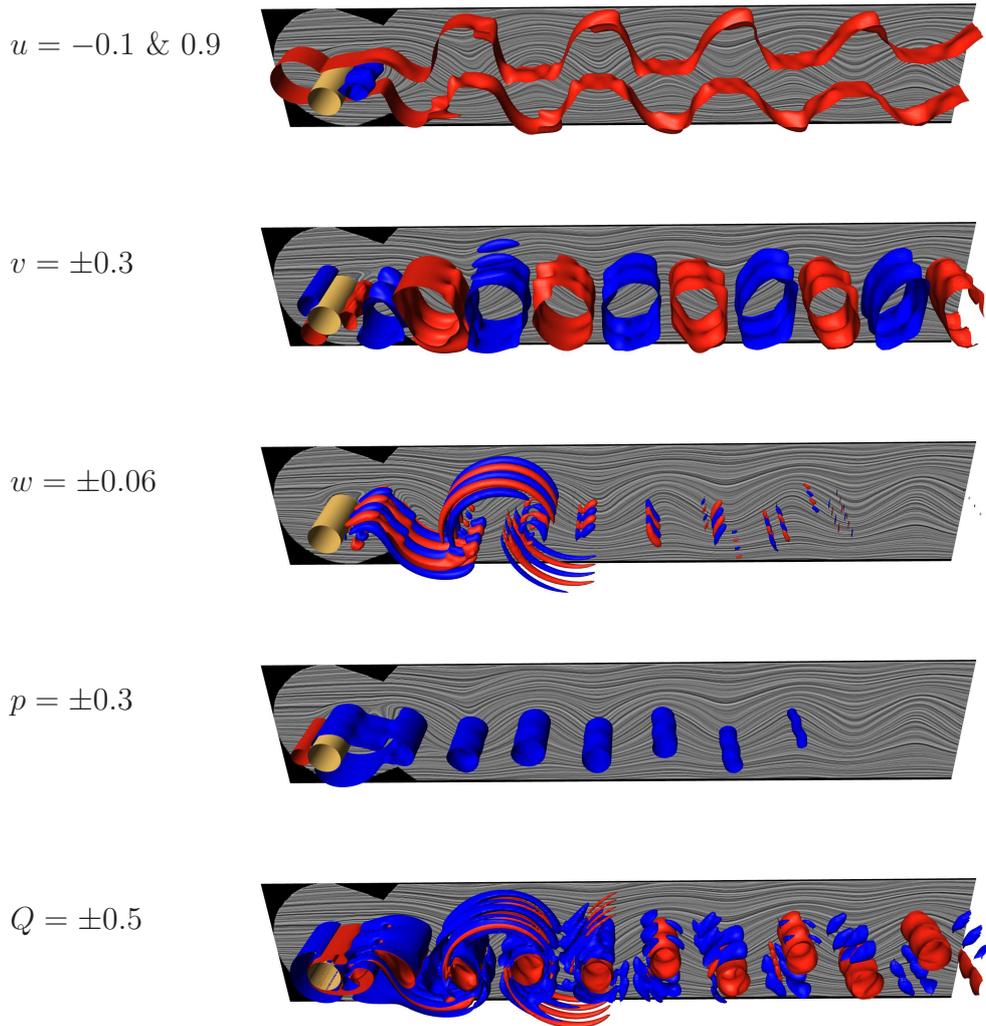


Abbildung. 4.14: Wie Abb. 4.10, jedoch für die B-Mode bei  $Re = 300$  und  $L_z = 1$ . Die Isoflächen-Werte sind vergleichbar:  $u = 0.9$ ,  $u = -0.1$ ,  $v = \pm 0.3$ ,  $w = \pm 0.06$ ,  $p = \pm 0.3$  und  $Q = \pm 0.5$ .

plexeren Dynamiken ist es, eine Attraktorcharakterisierung über einen Zeithorizont durchführen zu können, die für eine Simulation zu teuer würden. Desweiteren werden mit der Galerkin-Modellierung Aufschlüsse über Transienten und Aktuationsmöglichkeiten angestrebt. Ein weiterer potenzieller Vorteil des Galerkin-Modells ist die preisgünstige näherungsweise Berechnung von natürlichen und aktuierten Transienten.

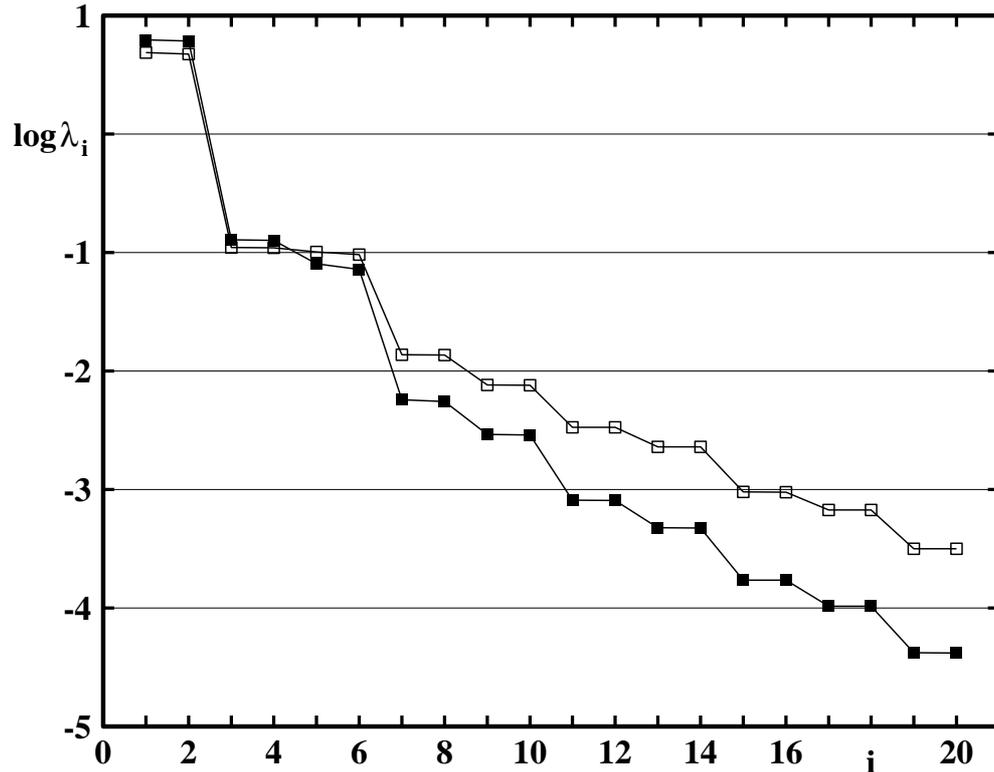


Abbildung. 4.15: Karhunen-Loève-Eigenwert-Spektren für die B-Mode aus Abb. 4.14 (□) und für die entsprechende 2D Strömung bei  $Re = 300$  zum Vergleich (■).

### 4.5.1 Galerkin-System

In Abbildung 4.18 werden einige wichtige lineare Koeffizienten des Galerkin-Systems von dem 2D Nachlauf bei  $Re = 200$  gezeigt. Die anderen betrachteten Simulationen ergeben qualitativ sehr ähnliche Systeme. Die Koeffizienten  $l_{ij}$  des Zähigkeitsterms sind negativ diagonaldominant, eine typische Eigenschaft vieler empirischer Galerkin-Modelle. Gemäß Gl. (3.41) ergeben sich aus der Diagonale die Dissipations-Effizienzen  $2\nu l_{ii}$ . Entsprechend beschreiben die positiven Diagonalelemente von  $q_{ij0}^k$  und  $q_{i0j}^k$  die Produktions- und Konvektions-Effizienzen, respektive. Bei der Konvektionsmatrix  $q_{i0j}^k$  sind die Nebendiagonalelemente viel augenfälliger als die Diagonalelemente. Diese Nebendiagonalelemente haben eine symplektische Struktur von ungekoppelten Oszillatoren. So beschreibt  $q_{102}^k$  in guter Näherung die Kreisfrequenz des ersten Modenpaares,  $q_{403}^k$  die Frequenz des zweiten Paares etc. Die Druckleistungs-Effizienzen werden in den Diagonalelementen der Druckmatrix definiert. Die Nebendiagonalelemente haben ebenfalls eine symplektische Struktur und können als durch den Druckterm induzierte Frequenzänderungen interpretiert werden.

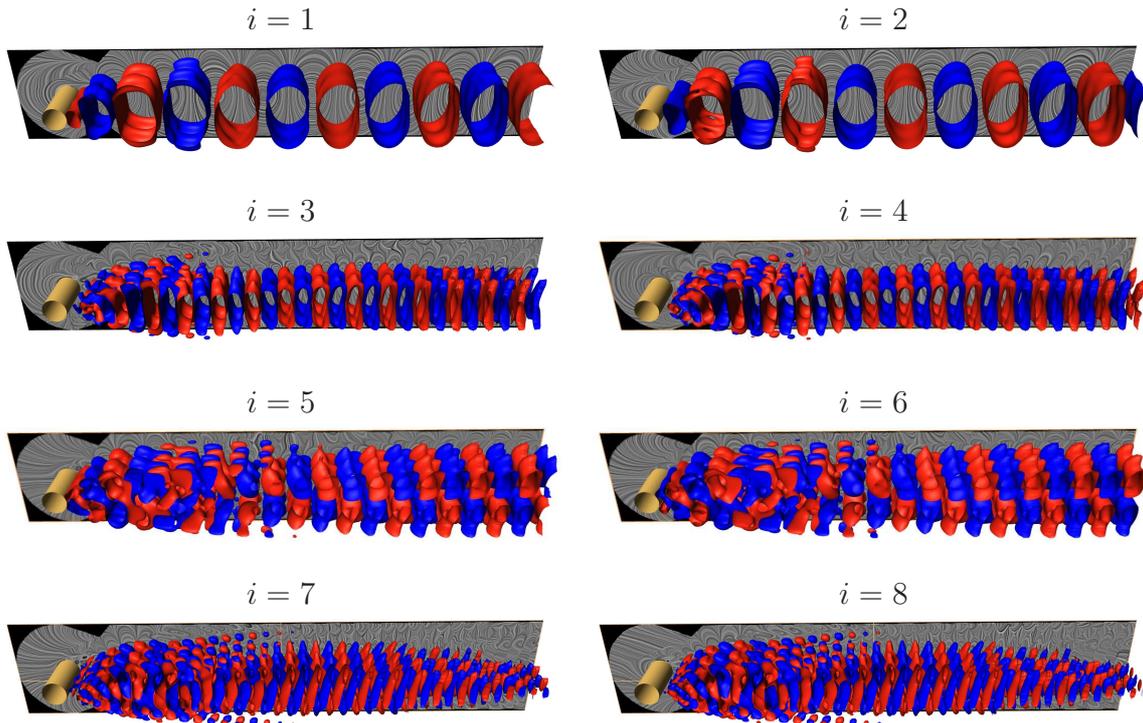


Abbildung. 4.16: Wie Abb. 4.12, jedoch für die B-Mode.

## 4.5.2 Galerkin-Modelle der periodischen Strömungen

Das Galerkin-System mit linearisiertem Druckmodell reproduziert die periodischen Fourier-Koeffizienten der Simulation mit weniger als 1% Fehler (Abb. 4.19). Alle periodischen Galerkin-Lösungen sind stabil. Jedoch liegen die Einschwingzeiten um ein bis zwei Größenordnungen über den im Experiment und in der Navier-Stokes-Simulation beobachteten Werten.

Die Galerkin-Systeme reproduzieren gut die Simulationen aus denen sie entwickelt wurden, zeigen jedoch viele unrealistische Eigenschaften für Transienten und für andere Reynolds-Zahlen. Dies wurde schon in [20, 80] für den zweidimensionalen Nachlauf bei  $Re = 100$  festgestellt.

## 4.5.3 Galerkin-Modell des einschwingenden Nachlaufs

In diesem Abschnitt wird der Grund für die unphysikalische Transientendarstellung untersucht. Wir beschränken uns dabei auf den 2D Nachlauf für  $Re = 100$ .

Abbildung 4.20 zeigt die mittlere Strömung  $\mathbf{u}_0$  und die ersten beiden Karhunen-Loève-Moden.

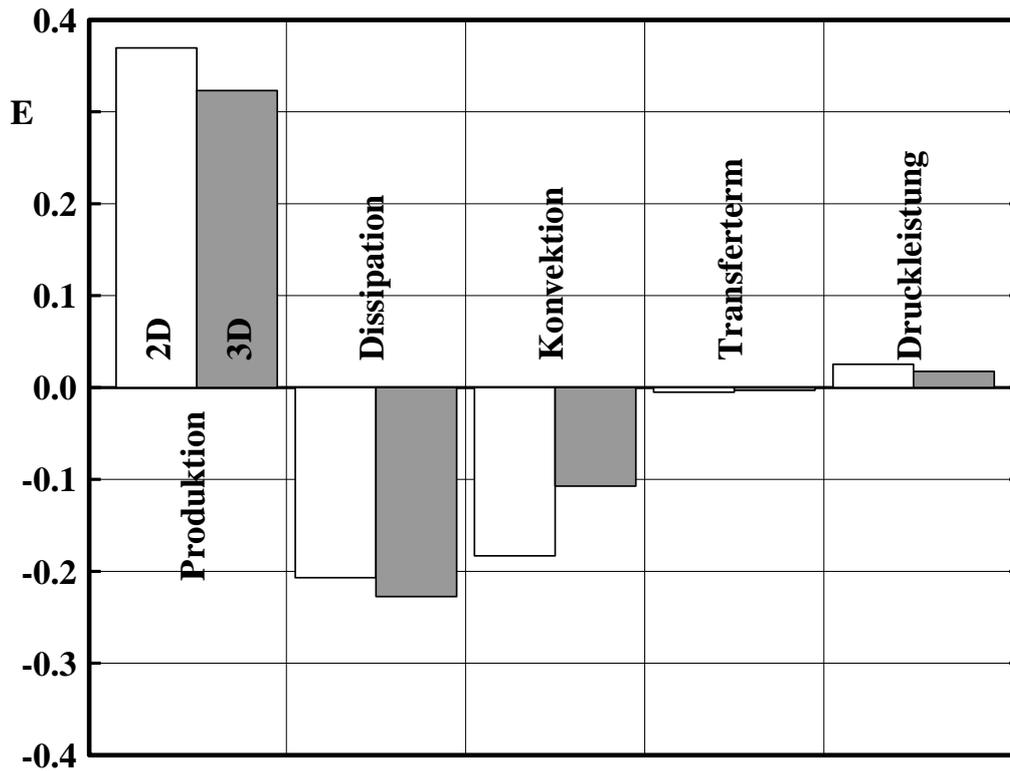


Abbildung. 4.17: Wie Abb. 4.13, jedoch für die B-Mode und zugehörige 2D Strömung bei  $Re = 300$ .

Der eingeschwungene Zustand ist qualitativ beschreibbar mit der stationären Lösung und den instabilsten Stabilitätseigenmoden (Abb. 4.21). Jedoch ist das Wirbelpaar der stationären Strömung deutlich länger und das Zentrum der Fluktuation korreliert mit der Länge des Wirbelpaares, d.h. die Energieverteilung der Fluktuation ist unterschiedlich. Die Wellenlänge der Instabilität ist länger und die Frequenz entsprechend geringer als bei der eingeschwungenen Strömung. Die Konstruktion der Verschiebungsmode aus §3.3 wird in Abb. 4.22 gezeigt.

Wir betrachten eine Transiente, die in der Nähe der stationären Lösung  $\mathbf{u}_s + 0.01\mathbf{u}_1$  bei  $t = 0$  beginnt. Abbildung 4.23 zeigt ausgewählte Schnappschüsse am Anfang, während des Einschwingens und nach dem Einschwingen. Die zugehörigen Fluktuationen sind in Abb. 4.24 dargestellt.

Die Fluktuation  $\mathbf{u}' := \mathbf{u} - \mathbf{u}_B$  kann (i) für die Grundströmung  $\mathbf{u}_B := \mathbf{u}_0$  des periodischen Nachlaufs, (ii) für die stationäre Lösung  $\mathbf{u}_B := \mathbf{u}_s$  oder (iii) bezüglich der Projektion auf die Verbindungslinie  $\mathbf{u}_B := \mathbf{u}_s + a_\Delta \mathbf{u}_\Delta$  bestimmt werden. Die zugehörigen Verläufe der Fluktuationsenergien der letzten beiden Definitionen zeigen eine Transiente von 5 Perioden (Abb. 4.25).

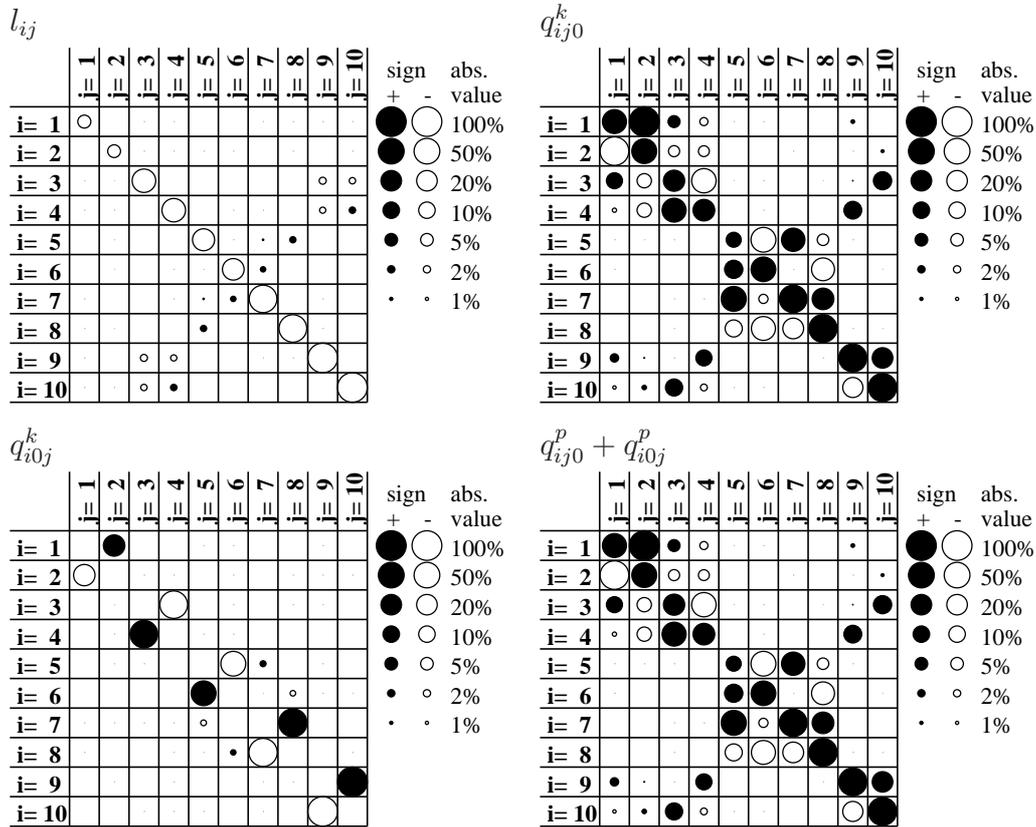


Abbildung. 4.18: Galerkin-System für den laminaren 2D Nachlauf bei  $Re = 200$  im Gebiet II. Dargestellt sind die Koeffizienten der linearen Terme, für  $i, j = 1, \dots, 10$ . In der Matrix werden positive (negative) Werte durch ausgefüllte (leere) Kreise markiert, wobei der Kreisradius logarithmisch von dem Absolutwert abhängt (siehe Skala). Die Zähigkeitskoeffizienten  $l_{ij}$  sind für die Dissipation verantwortlich, die Koeffizienten  $q_{ij0}^k$  für die Produktion, und die Koeffizienten  $q_{i0j}^k$  für den Konvektivterm und das Frequenzspektrum. Die Koeffizienten der Druckmatrix  $q_{ij0}^p + q_{i0j}^p$  bedingen Veränderung der Amplituden und Frequenzen durch den Druckterm.

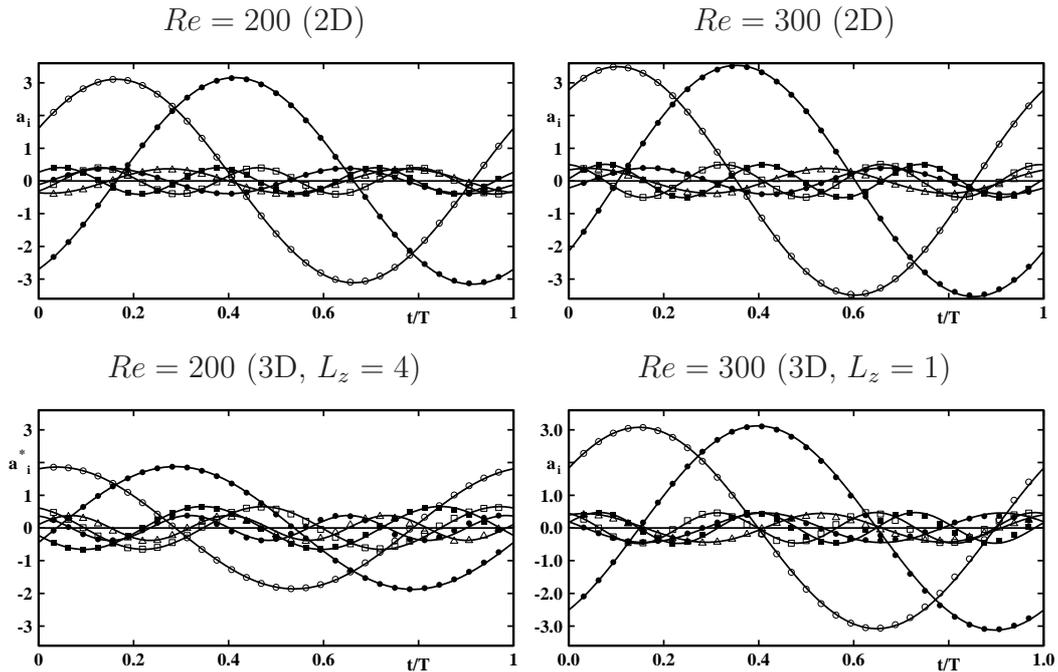


Abbildung. 4.19: Galerkin-Lösungen des eingeschwungenen Nachlaufs für den 2D (oben) und 3D Nachlauf (unten) bei  $Re = 200$  (links) und  $Re = 300$  (rechts). Dargestellt sind die ersten 6 Fourier-Koeffizienten  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$  der direkten Simulation (durchgezogene Linien) und des 20-dimensionalen Galerkin-Systems (Symbole) als Funktion der Zeit  $t$ . Die Index-Symbol-Zuordnung lautet: (●)  $i = 1$ ; (○)  $i = 2$ ; (■)  $i = 3$ ; (□)  $i = 4$ ; (▲)  $i = 5$ ; (△)  $i = 6$ . Die Zeit wird normalisiert mit der Periode  $T$  der zugehörigen direkten numerischen Simulation. Die Normalisierung des inneren Produkts (3.7) bedingt, dass die Modenenergie pro Längeneinheit proportional zur Varianz der Fourier-Koeffizienten ist.

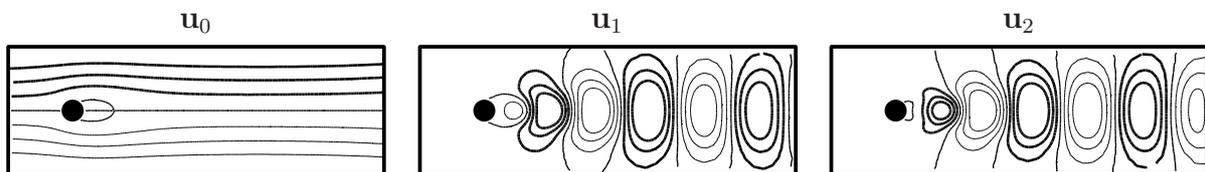


Abbildung. 4.20: Karhunen-Loève-Zerlegung des laminaren Nachlaufs bei  $Re = 100$ . Dargestellt sind Stromlinien der mittleren Strömung  $\mathbf{u}_0$  sowie der ersten und zweiten Karhunen-Loève-Mode  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ . Der Zylinder ist durch den ausgefüllten Kreis repräsentiert.

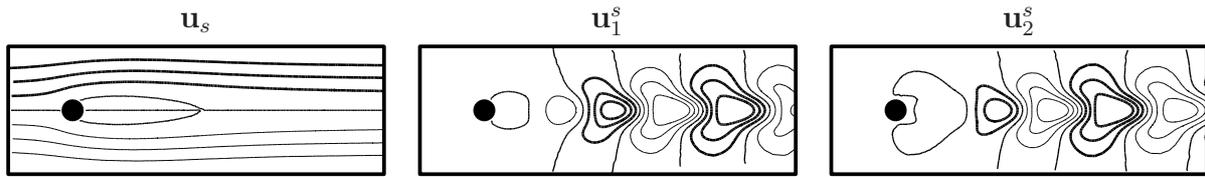


Abbildung. 4.21: Moden aus einer globalen Stabilitätsanalyse der stationären Nachlaufströmung bei  $Re = 100$ . Von links nach rechts sind die stationäre Navier-Stokes-Lösung  $\mathbf{u}_s$  mit Real- und Imaginärteil der instabilsten, komplexen Eigenmode  $\mathbf{f}_1$ ,  $\mathbf{u}_1^s := \Re\{\mathbf{f}_1\}$ ,  $\mathbf{u}_2^s := \Im\{\mathbf{f}_1\}$ , analog zu Abb. 4.20 repräsentiert.

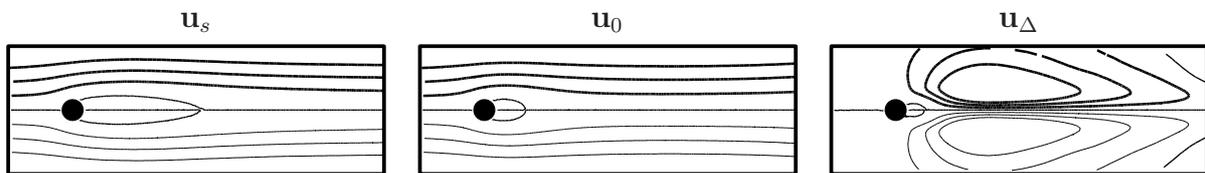


Abbildung. 4.22: Konstruktion der Verschiebungsmode  $\mathbf{u}_\Delta$  (rechts) aus der stationären (links) und der gemittelten Nachlaufströmung (Mitte). Die Darstellung ist analog zu Abb. 4.20 und 4.21.

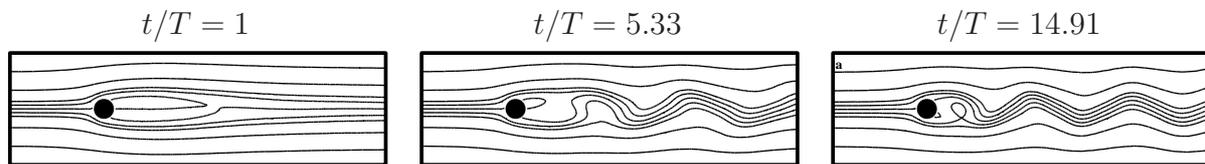


Abbildung. 4.23: Direkte numerische Simulation eines einschwingenden laminaren Nachlaufs bei  $Re = 100$  zu den angegebenen Zeiten  $t$ .  $T$  ist die Periode der eingeschwungenen Strömung. Die drei Zeiten  $t/T = 1, 5.33$  und  $14.91$  entsprechen Zuständen in der Nähe der stationären Lösung, während des Einschwingens und nach dem Einschwingen, respektive.

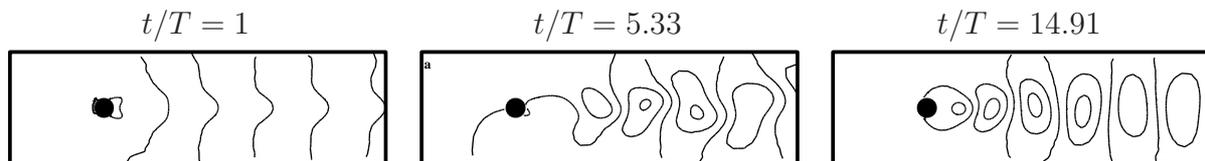


Abbildung. 4.24: Wie Abb. 4.23 jedoch für die Fluktuation um die Grundströmung  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_B$  (rechts). Hierbei ist  $\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_0 + a_\Delta \mathbf{u}_\Delta$  die Projektion der instantanen Geschwindigkeit auf die Verbindungslinie von gemittelter Strömung und stationärer Lösung.

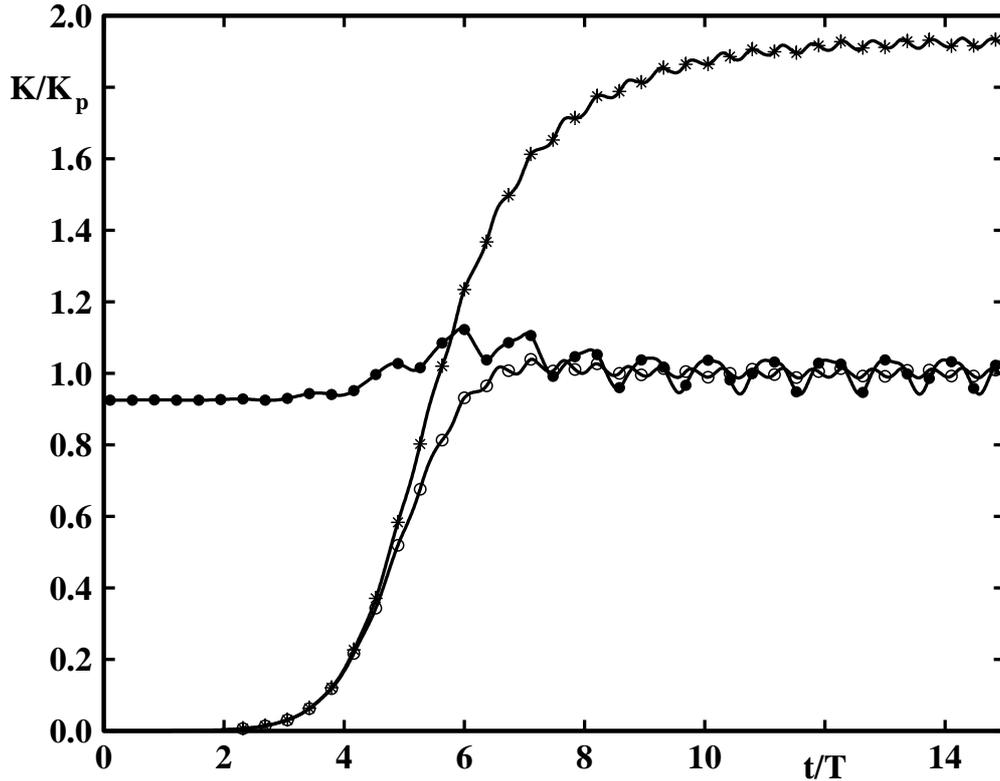


Abbildung. 4.25: Fluktuationsenergie eines einschwingenden Nachlaufs mit  $Re = 100$ . Die Energie wird von drei Arten der Fluktuation bestimmt: die Fluktuation um den Mittelwert,  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_0$  ( $\bullet$ ), die Fluktuation um die stationäre Lösung,  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_s$  ( $\star$ ), und die Fluktuation um die Grundströmung  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_B$  ( $\circ$ ), wobei  $\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_0 + a_\Delta \mathbf{u}_\Delta$  die Projektion der instantanen Geschwindigkeit auf die Verbindungslinie von gemittelter Strömung und stationärer Lösung darstellt. Die Fluktuationsenergie  $K$  wird mit dem Mittelwert des eingeschwingenen Nachlaufs  $K_p$  normalisiert.

Von besonderem Interesse sind die Residuen von drei Galerkin-Approximationen:

- A) Standard Karhunen-Loève-Zerlegung mit 8 Moden;
- B) 9-dimensionale Galerkin-Approximation mit 8 Karhunen-Loève- und einer Verschiebungsmode;
- C) 11-dimensionale Galerkin-Approximation mit 8 Karhunen-Loève-Mode, der Verschiebungsmode, und den beiden Stabilitätseigenmoden.

Abbildung 4.26 zeigt die zugehörigen Energien der Residuen für die Transiente. Die Galerkin-Approximation *A* hat einen Fehler von über 90% bezüglich der maximalen Fluktuationsenergie,

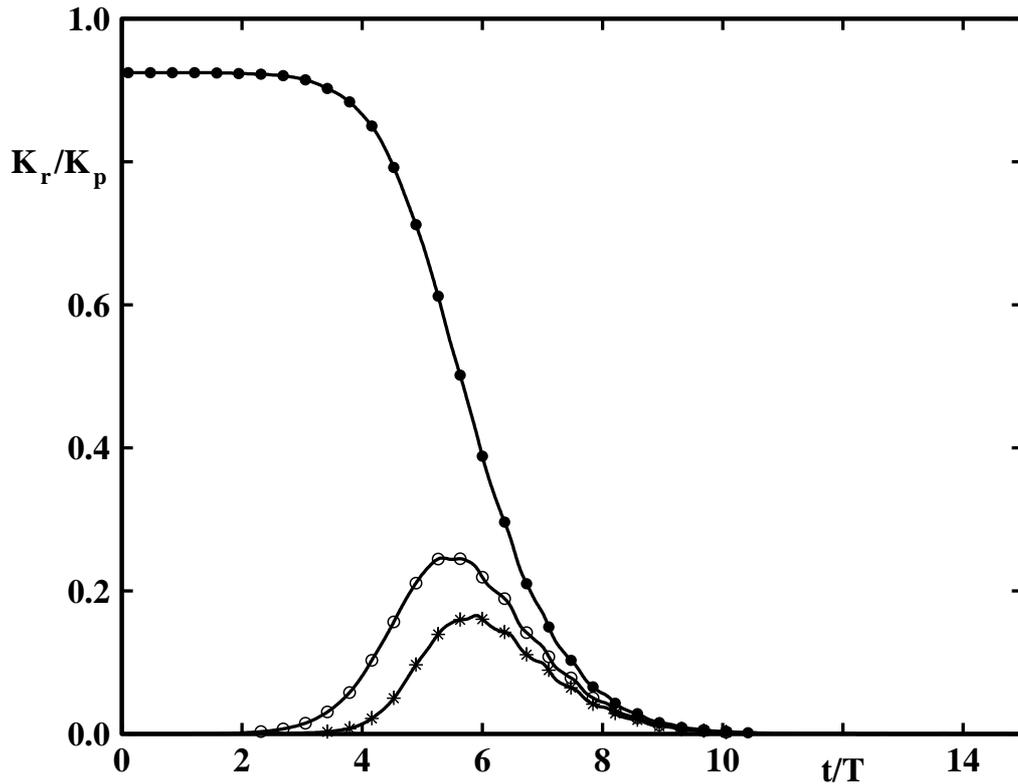


Abbildung. 4.26: Residuen von Galerkin-Approximationen des erschwingenden Nachlaufs aus Abb. 4.25. Dargestellt die Standard Karhunen-Loève-Zerlegung mit 8 Moden ( $\bullet$ ), die um eine Verschiebungsmode erweiterte Zerlegung ( $\circ$ ), und die um eine Verschiebungsmode mit den Stabilitätseigenmoden ergänzte Zerlegung ( $\star$ ). Das Energie-Residuum  $K_r$  wird wie in Abb. 4.25 normalisiert.

kann also die stationäre Lösung und die Transiente nicht adäquat auflösen. Dies ist nicht überraschend: Die Mean-Field-Korrektur wird durch die Verschiebungsmode aufgelöst und kann durch keine der Karhunen-Loève-Moden beschrieben werden. Der Attraktor ab  $t/T = 10$  wird mit einer Genauigkeit von 0.01 % aufgelöst.

Das Hinzufügen der Verschiebungsmode in Galerkin-Approximation  $B$  erlaubt per Konstruktion die Darstellung der stationären Lösung, d.h. den Beginn der Transiente. Das Maximum des zugehörigen Residuums von 23% wird bei  $t/T = 5.33$  erreicht.

Das relativ große Residuum lässt sich auch nach Hinzunahme der Stabilitätseigenmoden in der Galerkin-Approximation  $C$  nur auf 16% reduzieren. Das verbleibende Residuum lässt sich durch das Zwischenstadium der Fluktuation zwischen Stabilitätsmode und Karhunen-Loève-Moden erklären. Wenn das Fluktuationzentrum zum Zylinder von ca.  $x \approx 7$  zu ca.  $x \approx 2$  hin wandert, gibt

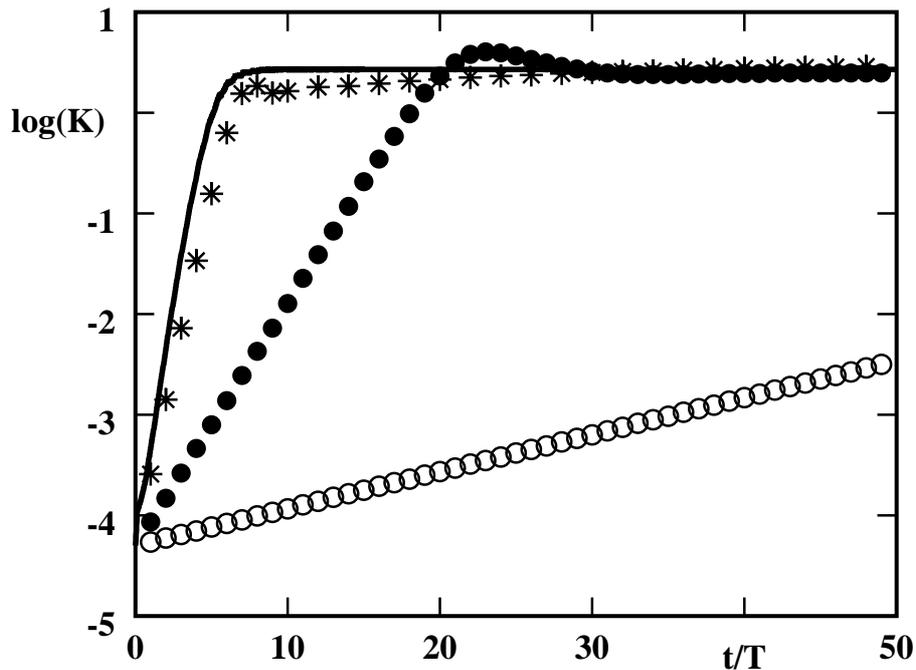


Abbildung. 4.27: Zeitliche Entwicklung der Fluktuationsenergie des einschwingenden Nachlaufs aus Abb. 4.23. Dargestellt sind die direkte numerische Simulation (durchgezogene Linie) sowie die Vorhersage der Galerkin-Lösung basierend auf 8 Karhunen-Loève Moden ( $\circ$ ). Die Galerkin-Lösung wird offensichtlich realistischer durch Hinzunahme der Verschiebungsmode ( $\bullet$ ) und der Stabilitätseigenmoden ( $\star$ ).

es einen Zustand, der weder gut durch die Stabilitätsmoden noch gut durch die Karhunen-Loève-Moden beschrieben werden kann. Diese Erklärung wird durch neuere Resultate mit interpolierten Moden erhärtet [52].

Die Genauigkeit der Galerkin-Approximation  $C$  im Vergleich zu der Approximation  $B$  hat sich jedoch drastisch verbessert für das Anfangsstadium der Transiente. Dies wirkt sich unmittelbar auf die Transiente des Galerkin-Modells aus, welche bei der (aufgelösten) Anfangsbedingung der Simulation startet. In Abbildung 4.27 wird der Verlauf der Fluktuationsenergie der Navier-Stokes-Simulation und der drei auf den Galerkin-Approximationen  $A$ ,  $B$  und  $C$  basierenden Galerkin-Systeme gezeigt. Augenscheinlich wird der Einschwingvorgang durch das Standard-Modell  $A$  ungenügend aufgelöst. Die Anfachungsrate ist ca. 5% des wahren Wertes. Durch Hinzunahme der Verschiebungsmode (Modell  $B$ ) liegt die Anfachungsrate ‚nur‘ um einen Faktor 3 unter dem wahren Wert. Das Modell  $C$  erlaubt eine befriedigende Auflösung der Transiente. Die Berechnung der Anfachungsrate aus den Galerkin-System-Koeffizienten (§3.4) ergibt einen Wert, der um weniger als 1% von dem der Stabilitätsanalyse abweicht.



## 5. Analyse und Modellierung einer Scherströmung

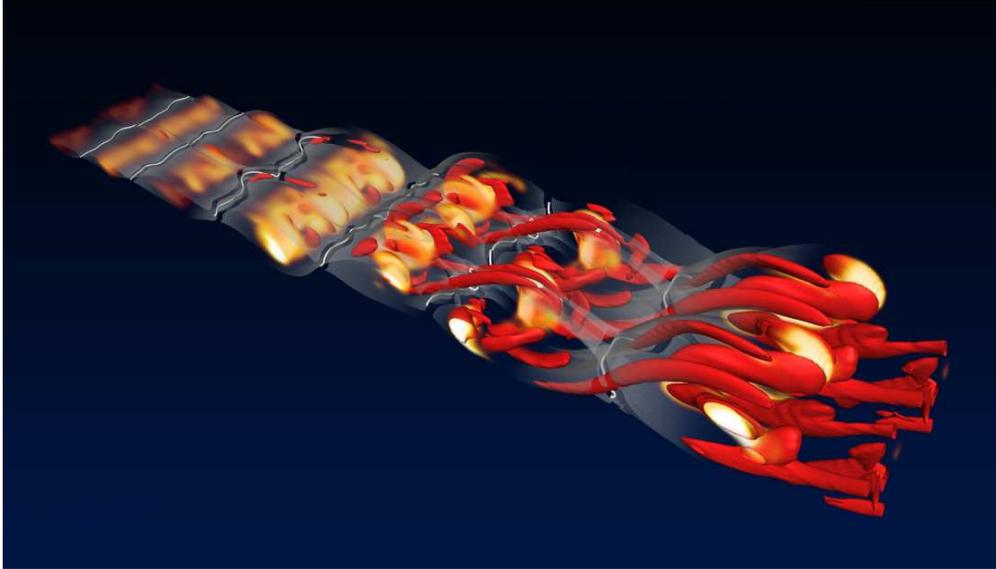
Die freie Scherschicht zwischen zwei Strömen unterschiedlicher Geschwindigkeit zählt zu den geometrisch einfachsten und am besten untersuchten Grundströmungen der Fluidodynamik — neben Kanalströmung, Grenzschicht, Nachlauf, Freistrahler und Gitterturbulenz. Selbst die Nachlaufströmung hinter einem stumpfen Körper besteht aus zwei sich synchronisierenden Scherschichten.

Augenfälliges Charakteristikum der Scherschicht sind die sich aufrollenden Kelvin-Helmholtz-Wirbel als Ausdruck einer reibungsfreien Instabilität. Die zugehörige Fluktuation setzt sich aus einer Kette von Wirbeln alternierenden Drehsinns zusammen, welche der Wirbelstraße sehr ähnlich ist. Im Gegensatz zu der Wirbelstraße werden nur jene Wirbel sichtbar, welche die Wirbelstärke der Scherschicht lokal verstärken.

Die Scherschicht-Instabilitäten lassen sich in guter Näherung reibungsfrei beschreiben. In der Näherung einer unendlich dünnen Wirbelschicht wurde von Kelvin und Helmholtz analytisch die Anfachungsrate in Abhängigkeit von der Wellenlänge bestimmt [51]. Die Stabilitätsanalyse wurde für Schichten endlicher Dicke mit einem  $\tanh$ -Profil erweitert [61]. Eine amplitudengesättigte Euler-Lösung der Kelvin-Helmholtz-Wirbel wurde von Stuart beschrieben [120]. Nach der Sättigung paaren sich benachbarte Wirbel aufgrund einer sekundären Instabilität [66]. Spätere Stadien setzen die Wirbelpaarung fort und führen zu einem Kaleidoskop von dreidimensionalen Strukturen, z.B. Zellenmustern [2] und spannweitigen Rippenwirbeln [60]. Abbildung 5.1 zeigt eine direkte numerische Scherschicht-Simulation, in welcher die beschriebenen Stadien von der Kelvin-Helmholtz-Instabilität bis zur Wirbelpaarung mit spannweitigen Rippenwirbeln aufgelöst sind.

Hinsichtlich der 2D und 3D Strukturen gibt es eine Reihe bemerkenswerter kinematischer Gemeinsamkeiten [12]. Die Dynamik von Scherschicht und Nachlauf sind jedoch unterschiedlich. So ist die Scherschicht zwischen zwei Strömen gleich gerichteter Geschwindigkeit konvektiv instabil [41], während die Nachlaufströmung durch eine absolute Instabilität charakterisiert ist [86]. Ein weiterer Unterschied ist, dass sich die Scherschicht-Strukturen stromabwärts immer weiter entwickeln, während die Fluktuation der Nachlaufströmung stromabwärts verschwindet.

Die Scherschicht-Strömung wird somit durch Konvektions- und Reorganisationsprozesse domi-



*Abbildung. 5.1: Direkte numerische Scherschicht-Simulation [16] aus dem Konferenzbeitrag [127]. Gezeigt wird ein Untergebiet eines Schnappschusses, aus welchem man von links nach rechts die räumliche Entwicklung der Scherschichtwirbel von der anfänglichen Kelvin-Helmholtz-Instabilität bis zur Wirbelpaarung mit spannweitigen Rippenwirbel entnehmen kann. Die Reynolds-Zahl beträgt 100 und basiert auf der anfänglichen Scherschichtdicke und Konvektionsgeschwindigkeit. Das Geschwindigkeitsverhältnis zwischen oberem und unterem Strom beträgt 3 : 1. Das Wirbelstärkefeld wird mit dem  $Q$ -Parameter visualisiert. Die Kelvin-Helmholtz-Wirbel werden durch eine helle volumetrische Darstellung positiver Werte hervorgehoben. Die spannweitigen Rippenwirbel werden durch eine rote Isofläche von  $Q \cos^2 \theta$  dargestellt. Hierbei ist  $\theta$  der Winkel zwischen der Wirbelstärke und der Achse. Diese Größe verschwindet für 2D Strukturen parallel zur spannweiten Richtung. Im mitkonvektierten Bezugssystem werden die Sattelpunkte des Geschwindigkeitsfeldes durch helle Linien, die zugehörigen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit durch transparente Flächen visualisiert.*

niert. Die Grobstrukturen lassen sich in guter Näherung durch niederdimensionale Wirbelmodelle beschreiben [14]. Für die Galerkin-Modellierung sind Scherschichten eine Herausforderung, da ein Produktionsprozess durch einen globalen Modenansatz beschrieben wird. In vorliegender Arbeit wird das erste empirische Galerkin-Modell für eine 2D und 3D Scherströmung beschrieben, welches — abgesehen von der Galerkin-Approximation — analytisch aus der Navier-Stokes-Gleichung ohne empirische Zusatzmodelle abgeleitet wurde. Das Augenmerk liegt auf periodischen 2D und 3D Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten. Modelle irregulärer Scherschichten, wie in Abb. 5.1, werden in [82] entwickelt.

## 5.1 Direkte numerische Simulation

Die Strömung wird in einem kartesischen Koordinatensystem  $x, y, z$  beschrieben, wobei die  $x$ -Achse in Richtung der Strömung zeigt, die  $y$ -Achse in Richtung der Scherung orientiert ist, und die  $z$ -Achse die spannweite Richtung definiert. Der Ursprung  $y = 0$  liegt in der Schicht maximaler Scherung. Entsprechend repräsentieren  $u$ ,  $v$  und  $w$  die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Komponente der Geschwindigkeit  $\mathbf{u} := (u, v, w)$ . Die Grundströmung  $\mathbf{u} = U(y) \mathbf{e}_x$  wird beschrieben durch das tanh-Profil

$$U(y) = \frac{1}{2} (U_1 + U_2) + \frac{1}{2} (U_1 - U_2) \tanh\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad (5.1)$$

wobei  $U_1, U_2$  die Geschwindigkeiten des oberen und unteren Stromes, respektive, darstellen und  $\delta$  die Scherschichtdicke repräsentiert. Die Dicke der Wirbelschicht wird durch  $\delta_v = 2\delta$  definiert. Im Folgenden werden alle Größen entdimensionalisiert mit der maximalen Geschwindigkeit  $U_1$  und Scherschichtdicke  $\delta$ . Das Geschwindigkeitsverhältnis wird zu  $U_1/U_2 = 3$  bestimmt — in Übereinstimmung mit einer Vielzahl von experimentellen und numerischen Untersuchungen [2, 16]. Die Reynolds-Zahl bezogen auf die Maximalgeschwindigkeit und Scherschichtdicke beträgt  $Re = 150$ .

Für die Scherschicht-Simulation wurde ein Finite-Differenzen-Verfahren auf einem versetzten Gitter mit Druckkorrektur entwickelt [26]. Das Verfahren basiert auf zentralen Differenzen-Formeln vierter Ordnung für die räumlichen Ableitungen und einer Prädiktor-Korrektor-Zeitintegration zweiter Ordnung. Die gewählten Diskretisierungs- und Integrationsordnungen folgen einerseits den Genauigkeitsanforderungen für transitionelle Strömungen [99] und erlauben andererseits eine effiziente Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen mit der für die Galerkin-Modellierung erforderlichen Genauigkeit.

Das Gitter ist in der Scherschicht verdichtet und außerhalb derselben sowie in Strömungs- und Spannrichtung äquidistant (siehe Abb. 5.2). Die Ortsdiskretisierung basiert auf 100 Zellen in  $x$ -Richtung, 150 Zellen in  $y$ -Richtung und 40 Zellen in  $z$ -Richtung.

Der Navier-Stokes-Löser wurde umfangreichen Validierungsmaßnahmen unterzogen. So wurden die zeitlichen und räumlichen Anfachungsraten von 2D und 3D Eigenmoden aus linearen Stabilitätsanalysen bis auf 0.01% reproduziert [79]. Des Weiteren ergibt die Energiefluss-Analyse aller untersuchten nichtlinearen Scherschicht-Lösungen ein Residuum unter 0.1% der Produktion. Das vorliegende Gitter diskretisiert ein kleines Gebiet

$$\Omega := \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 30, -10 \leq y \leq 10, 0 \leq z \leq L_z\}$$

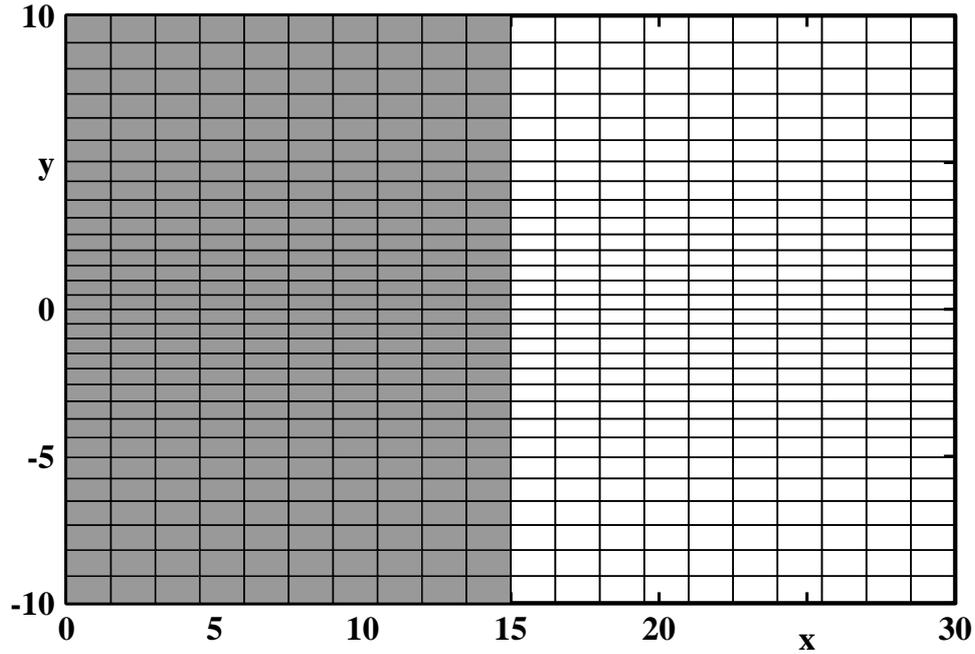


Abbildung. 5.2: Gitter für die direkte numerische Simulation der 2D Scherschicht. Gebiet I ist grau hinterlegt und dient als kleineres Beobachtungsgebiet für die Galerkin-Modellierung. Gebiet II entspricht dem gesamten Rechengebiet. In beiden Raumrichtungen wird jeweils nur jede fünfte Gitterlinie dargestellt.

mit der beschriebenen Genauigkeit, welche für die Galerkin-Modellierung ausreicht. In einer parametrischen Untersuchung wurde sicher gestellt, dass die Navier-Stokes-Lösung nur vernachlässigbar von der Dirichlet'schen Randbedingung (3.3) mit  $\mathbf{u}_{\text{RB}} = U(y) \mathbf{e}_x$  am transversalen Gebietsrand  $y = \pm 10$  und von der konvektiven Ausströmbedingung (3.5) bei  $x = 30$  abhängt [79].

Die Einströmbedingung bei  $x = 0$  resultiert aus einer räumlichen Scherschicht-Entwicklung für  $x < 0$  und spielt eine wichtige Rolle für die Navier-Stokes-Lösung. Der Vorlauf  $x < 0$  wird modelliert mit der linearen lokalen Stabilitätstheorie einer Parallelströmung mit  $\tanh$ -Profil (5.1), d.h. die Grundströmung wird überlagert mit der räumlich am meisten angefachten 2D Instabilitätsmode  $\mathbf{u}_{2D}^*$ ,

$$\mathbf{u}(0, y, t) = U(y) \mathbf{e}_x + A_{2D} \mathbf{u}_{2D}^*(0, y, t). \quad (5.2)$$

Die Mode  $\mathbf{u}_{2D}^*(x, y, t)$  hat die Periode  $T = 23.40$  und die Amplitude  $A_{2D}$  wird so bestimmt, dass die maximale  $v$ -Komponente 2% der Anströmung ist.

Bei der 3D Strömung wird die Einlaufströmung überlagert von der am meisten angefachten 3D Stabilitätsmode mit gegebener spannwitiger Wellenzahl  $\beta = 2\pi/L_z = 0.4070$ . Diese Stabi-

litätsmode repräsentiert eine schräge Kelvin-Helmholtz-Welle. Aus Symmetriegründen gibt es 2 davon, eine, die am Einströmrand in die in positive  $z$ -Richtung läuft,  $\mathbf{u}_{3D}^+$ , und eine mit entgegengesetzter Phasengeschwindigkeit,  $\mathbf{u}_{3D}^-$ . Weitere Details dieser Stabilitätsmoden können [84] oder der einschlägigen Literatur entnommen werden. Die resultierende Einströmbedingung lautet

$$\mathbf{u}(0, y, t) = U(y) \mathbf{e}_x + A_{3D} \mathbf{u}_{3D}^+(0, y, z, t) + A_{3D} \mathbf{u}_{3D}^-(0, y, z, t), \quad (5.3)$$

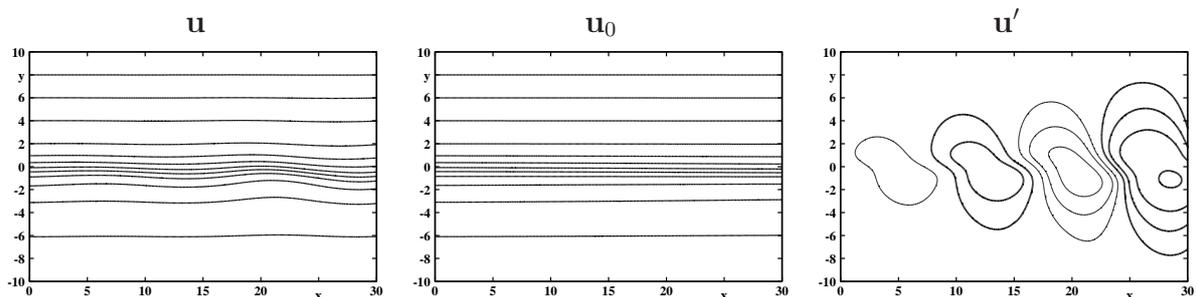
wobei  $\mathbf{u}_{3D}^\pm(x, y, z, t)$  die Zeitperiode von  $\mathbf{u}_{2D}^*$  hat. Analog zur 2D Simulation wird  $A_{3D}$  so gewählt, dass die  $v$ -Komponente den maximalen Ausschlag 0.02 annimmt. Weitere Gründe für die Wahl des Gebiets und der Randbedingungen werden in [84] genannt.

## 5.2 Niederdimensionale Beschreibung der laminaren Scherströmung

Im Folgenden wird die Entstehung der ebenen Kelvin-Wirbel analog zur von Kármán'schen Wirbelstraße (§4.2) analysiert.

### 5.2.1 Karhunen-Loève-Zerlegung

Die oben beschriebene 2D Simulation der Scherschicht konvergiert nach wenigen Perioden gegen eine periodische Lösung, die räumlich wachsende Kelvin-Wirbel zeigt (Abb. 5.3).



**Abbildung. 5.3:** Reynolds-Zerlegung der laminaren Scherschicht bei  $Re = 150$ . Von links nach rechts werden Stromlinien eines instantanen Strömungsfeldes  $\mathbf{u}$ , der zeitgemittelten Strömung  $\mathbf{u}_0$ , und der zugehörigen Fluktuation  $\mathbf{u}'$ , respektive, dargestellt.

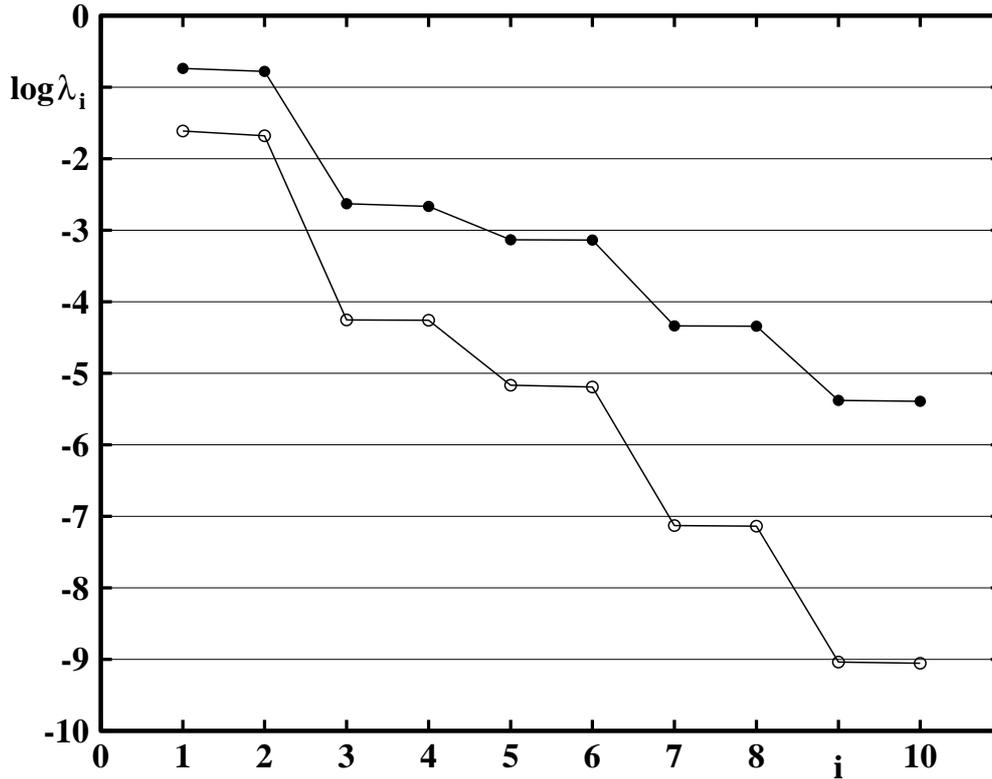


Abbildung. 5.4: Karhunen-Loève-Eigenwert-Spektren der laminaren Scherschicht bei  $Re = 150$  (siehe Abb. 5.3). Dargestellt ist  $\log \lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, 10$  für die Gebiete I ( $\circ$ ) und II ( $\bullet$ ).

Die zugehörige Karhunen-Loève-Zerlegung (Abb. 5.4, 5.5). folgt den Gesetzmäßigkeiten, die für den Kreiszyylinder-Nachlauf beobachtet wurden (Abb. 4.4, 4.5). Die Karhunen-Loève-Zerlegung ergibt Paare von Moden mit gleicher Frequenz, gleicher charakteristischer Wellenzahl und ähnlicher Energie. Insbesondere lösen Mode 1 & 2 die erste Harmonische auf, Mode 3 & 4 die zweite, usw.

Die Energie der Moden in dem Untergebiet  $I$  ist um mindestens eine Größenordnung kleiner als die des Gesamtgebiets. Mit anderen Worten: Die meiste Fluktuationsenergie bildet sich erst in der zweiten Wellenlänge aus. Im Gebiet  $I$  fallen die Energieniveaus  $\lambda_i/2$  deutlich schneller mit Modenindex  $i$  als im Gebiet  $II$ . Dieses Verhalten kann mit der stromabwärts zunehmenden Rolle der Nichtlinearität für den Energietransfer unter den Moden erklärt werden. Für die transitionelle Grenzschicht wird ein ähnliches Verhalten beobachtet [95].

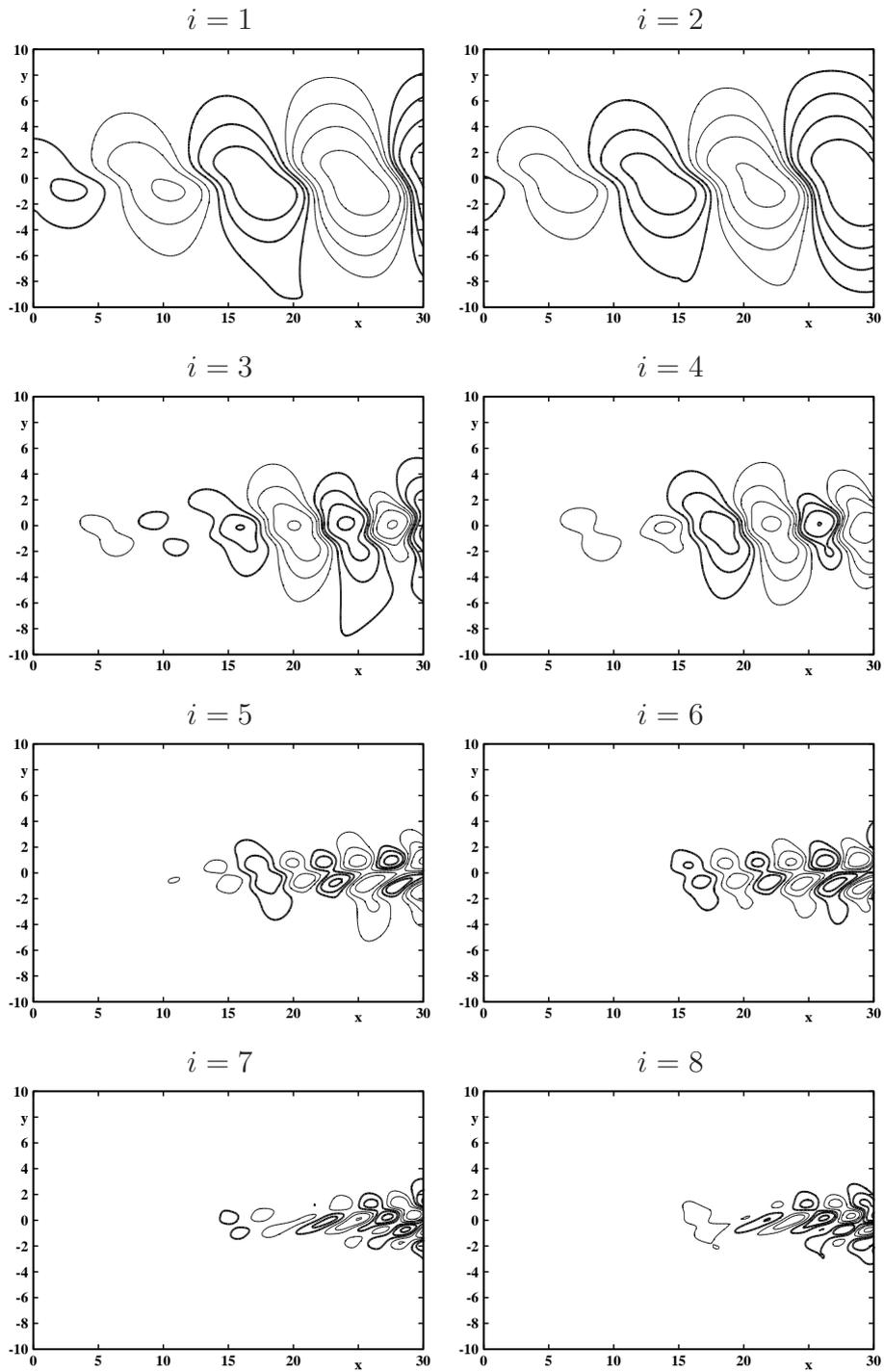


Abbildung. 5.5: Karhunen-Loève-Moden  $\mathbf{u}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$  der laminaren Scherschicht im Gebiet II bei  $Re = 150$ . Die Visualisierung erfolgt mit Stromlinien.

### 5.2.2 Energiefluss-Analyse

Die globale Energiefluss-Analyse (siehe Abb. 5.6) zeigt die Produktion als einzige Quelle der Fluktuationsenergie und die Konvektion als die dominierende Senke. Die Strömung ist also weit entfernt von einer Gleichgewichtsströmung, bei der sich Produktion und Dissipation nivellieren.

Die Dissipation und Druckleistung sind im Gesamtgebiet *II* Senken von vergleichbarer Größe. Beim Nachlauf verschwindet die Konvektion mit zunehmender Gebietsgröße, da sich die Wirbel in Zylindernähe bilden und stromabwärts dissipieren. Hingegen bilden sich die Scherschichtwirbel stromabwärts weiter aus durch die nicht abnehmende transversale Geschwindigkeitsdifferenz. Wählt man — analog zu der Scherschicht — bei dem Nachlauf einen Bereich mit 2 Wellenlängen (Gebiet *II* in Abb. 4.1) wirkt der Druck als Energiequelle und nicht als Senke (Abb. 4.7). Dieser Unterschied scheint korreliert mit der Tatsache, dass die Fluktuationsenergie beim Nachlauf am Ausströmrand abnimmt und bei der Scherschicht dort zunimmt. Der Druck scheint eine ausgleichende Wirkung auf die Abnahme bzw. Zunahme der Fluktuationsenergie zu haben, analog

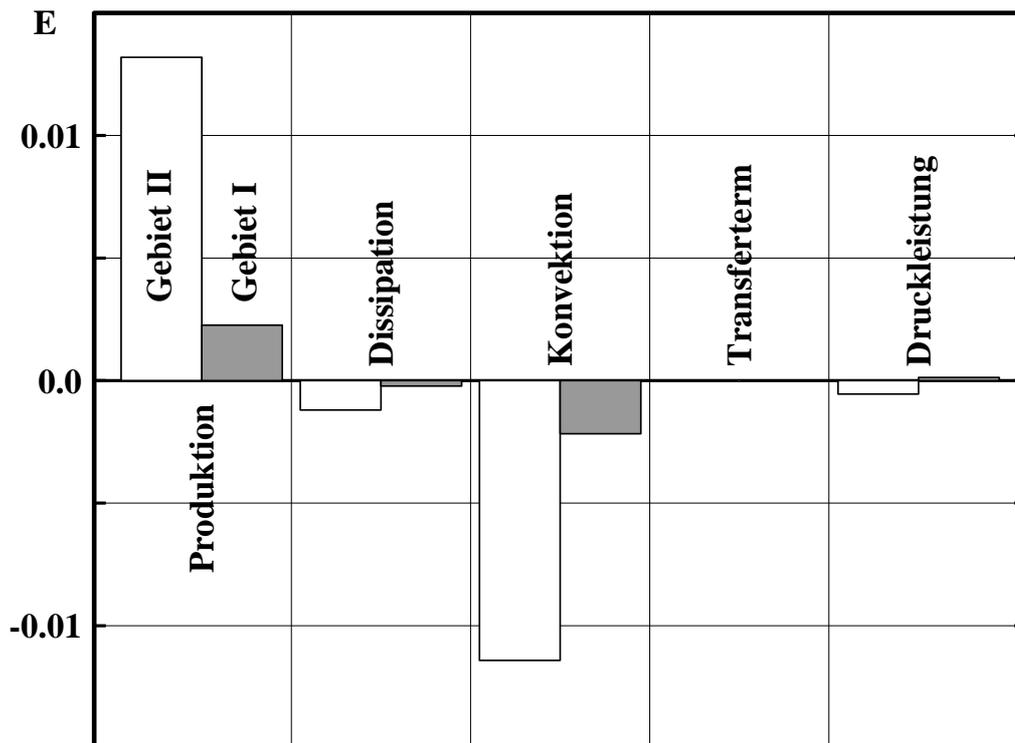


Abbildung. 5.6: Energiefluss-Terme für die laminare Scherschicht bei  $Re = 150$ . Im Histogramm sind die fünf Bilanz-Terme für die Fluktuationsenergie dargestellt. Die Terme für die Gebiete I und II sind als graue und weiße Balken, respektive, dargestellt.

zu dem Le Chatelier-Prinzip in der Chemie. Eine ähnlich ausgleichende Wirkung des Drucks wird beobachtet bei der Turbulenz in der Wiederherstellung der Gleichverteilung der Fluktuation in allen drei Raumrichtungen (siehe z.B. [104]).

Die dominierende Rolle der ersten beiden Moden in der globalen Energiebilanz geht aus Abb. 5.7 hervor. Die instantane Druckleistung pendelt zwischen positiven und negativen Werten um einen negativen Mittelwert. Dies äußert sich in der vorliegenden modalen Bilanz in einem negativen Beitrag, der den positiven betragsmäßig übersteigt.

Die modalen Energie-Effizienzen zeigen das vom Nachlauf bekannte Verhalten (siehe Abb. 5.8). Die grobskaligen Moden geben Energie an die feinskaligeren ab und letzte leben im Gleichgewicht zwischen diesem Energietransfer und der Dissipation.

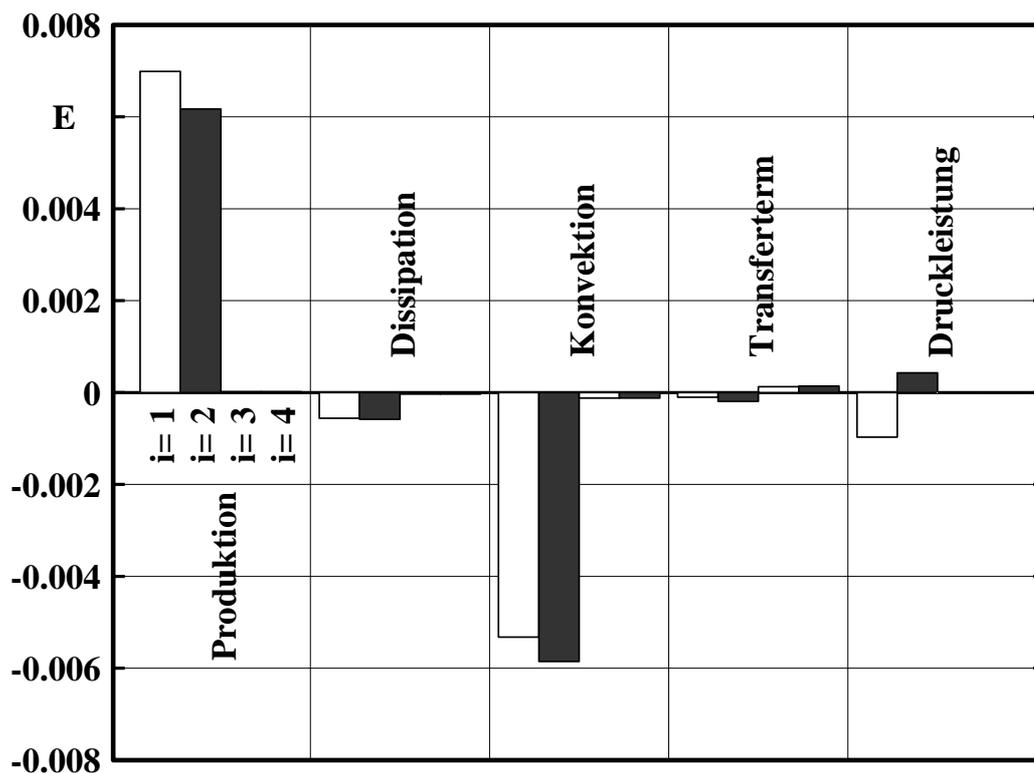


Abbildung. 5.7: Modale Energiefluss-Analyse der laminaren Scherschicht. Im Histogramm sind die Einzelbeiträge der ersten 4 Karhunen-Loève-Moden zu den Energietermen aus Abb. 5.6 aufgelöst. Die Beiträge der höheren Moden sind unbedeutend.

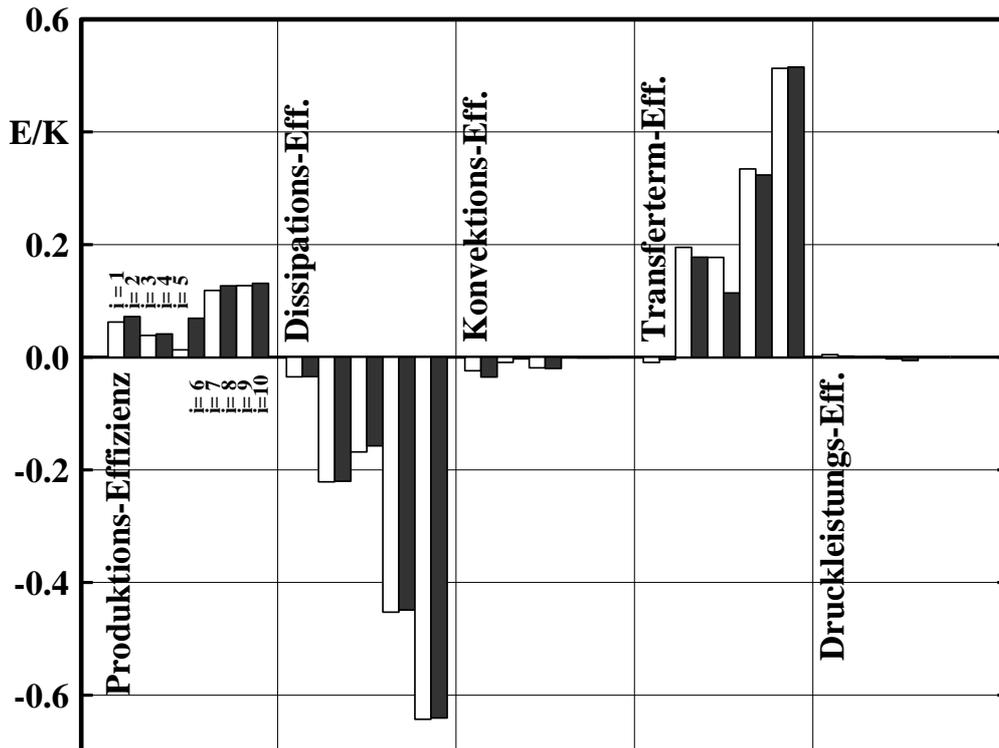


Abbildung. 5.8: Modale Energiefluss-Effizienz der Moden der laminaren Scherschicht. Die Einzelbeiträge der ersten 10 Karhunen-Loève-Moden aus der Energiefluss-Analyse zu Abb. 5.7 werden normalisiert mit der modalen kinetischen Energie  $K_i$ .

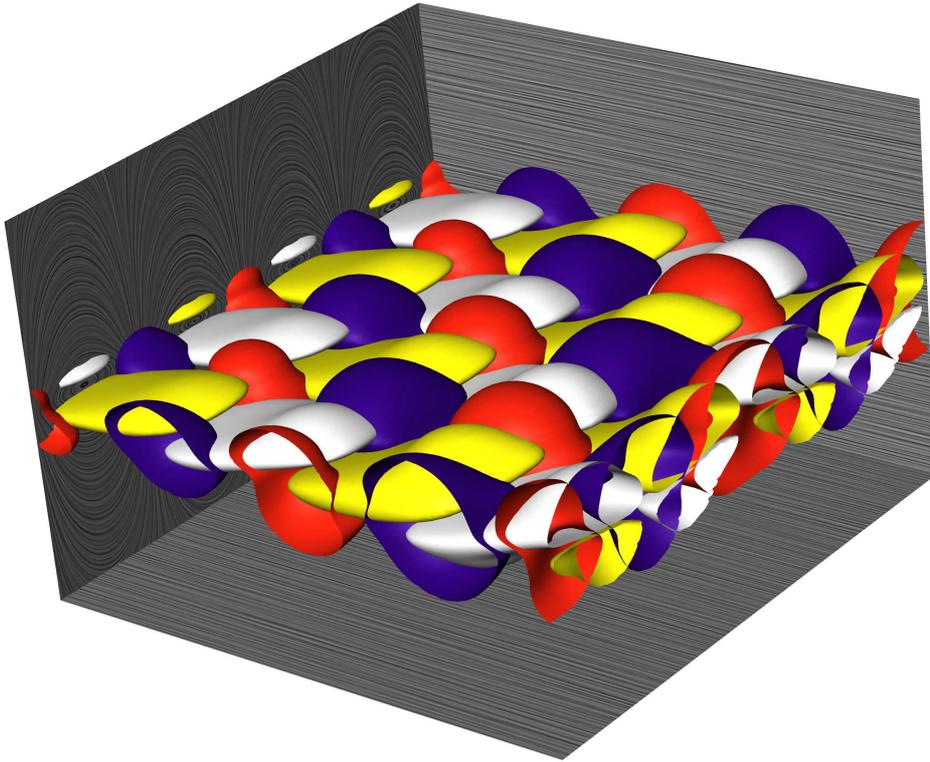
## 5.3 Niederdimensionale Beschreibung der transitio- nellen Scherströmung

In diesem Abschnitt soll die Auswirkung dreidimensionaler Strukturen auf die Scherschicht-Dynamik untersucht werden.

### 5.3.1 Karhunen-Loève-Zerlegung

Die oben beschriebene direkte Navier-Stokes Simulation konvergiert zu einer periodischen Strömung mit spannwitigen Zellen von gegenphasigen Kelvin-Helmholtz-Wellen (siehe Abb. 5.9).

Die Fluktuationsenergie pro Längeneinheit in  $z$ -Richtung ist bei der 3D Scherschicht trotz gleicher Amplitude in  $v$  deutlich niedriger als bei dem 2D Pendant (Abb. 5.10). Ein Grund ist die



*Abbildung. 5.9: Schnappschuss der transitionellen Scherschicht bei  $Re = 150$ . Die dunklen Wände im Hintergrund markieren das Rechengebiet mit Integrallinien der wandparallelen Geschwindigkeit. Die  $v$ - und  $w$ -Komponente der Geschwindigkeit werden im Inneren durch Isoflächen dargestellt:  $v = 0.01$  (rot),  $v = -0.01$  (blau),  $w = 0.01$  (gelb),  $w = -0.01$  (weiss).*

spannweitige Periodizität der Fluktuation, wodurch die einströmende Fluktuationsenergie um 50% niedriger ist als bei der 2D Strömung. Ein weiterer Grund liegt in der geringeren linearen Wachstumsrate der 3D Kelvin-Helmholtz-Instabilität im Vergleich zu der 2D Instabilität [84].

Abbildung 5.11 zeigt die mittlere Strömung und die ersten Karhunen-Loève-Moden. Modenpaar  $i = 1, 2$  löst die erste Harmonische auf und die Grundwellenzahl in  $x$ - und  $z$ -Richtung, Modenpaar  $i = 3, 4$  beschreibt die doppelte Frequenz und doppelte Wellenzahlen in  $x$ - und  $z$ -Richtung usw.

### 5.3.2 Energiefluss-Analyse

Die niedrigeren Energie-Niveaus der 3D Strömung korrelieren mit den niedrigeren Energiefluss-Termen (Abb. 5.12). Die relative Bedeutung der Dissipation nimmt bei der 3D Konfiguration

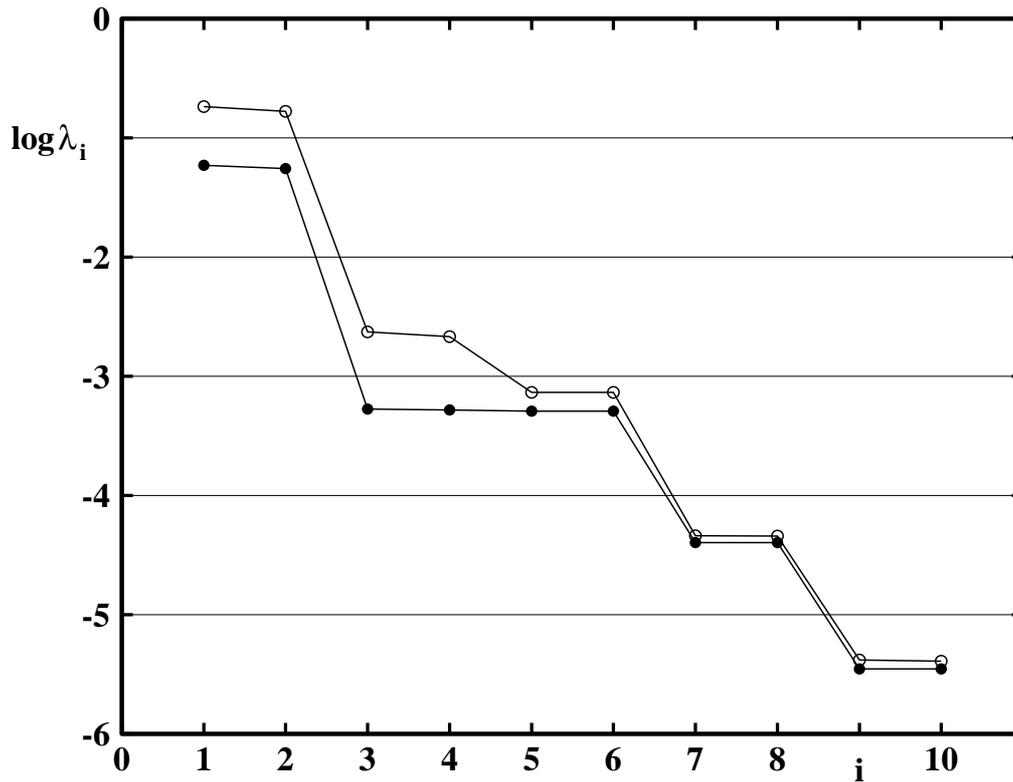


Abbildung. 5.10: Karhunen-Loève-Eigenwert-Spektren für die laminare (●) und transitionelle (○) Scherschicht bei  $Re = 150$ . Dargestellt ist  $\log \lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, 10$ , wobei  $\lambda_i$  den  $i$ -ten Eigenwert darstellt. Analog zur Nachlaufströmung (Abb. 4.11)), werden die Werte der 3D Simulation mit der spannweitigen Wellenlänge normiert.

im Vergleich zur der 2D Konfiguration durch die spannweitige Reibung zu. Dadurch wird ein größerer Anteil der Fluktuationsenergie vor dem Verlassen des Ausströmrandes dissipiert und das Verhältnis von Konvektions- zu Produktionsterm wird kleiner. Ebenso nimmt die Rolle der Druckleistung als Energiesenke deutlich ab. Es wird auch eine geringere Korrelation zwischen der Geschwindigkeits- und Druckfluktuation am Austrittsrand beobachtet, was mit der spannweitigen Phasenveränderung korreliert. Bei der A-Mode des Nachlaufs wurde ebenfalls eine Verringerung des Verhältnisses der Druckleistung zur Produktion im Vergleich zur 2D Grundströmung beobachtet, was einen ähnlichen Grund haben dürfte.

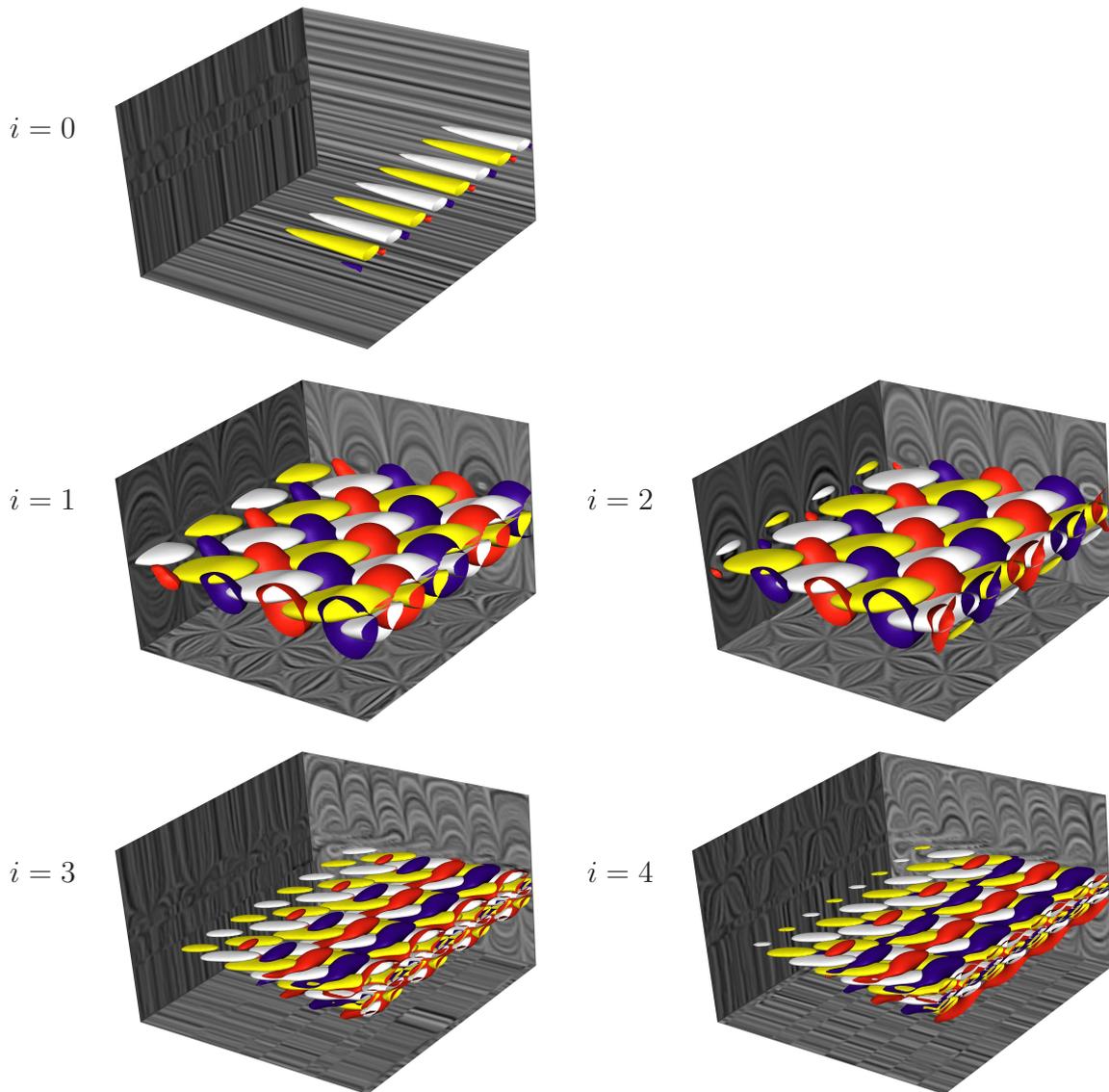


Abbildung. 5.11: Karhunen-Loève-Moden  $\mathbf{u}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 4$  der transitionellen Scherschicht bei  $Re = 150$ . Die Strömung wird wie in Abb. 5.9 dargestellt.

## 5.4 Niederdimensionale Galerkin-Modellierung

Die Galerkin-Modelle der 2D und 3D Scherschicht sind ab 6 Moden auskonvergiert, d.h. die Galerkin-Lösung ändert sich mit zunehmender Modenanzahl nur vernachlässigbar. Der Einfluss der Druckterm-Darstellung auf die Galerkin-Lösung kann aus den Phasen-Portraits (Abb. 5.13, 5.14) für die 2D und 3D Strömung entnommen werden. Durch die Vernachlässigung des Drucks als Energiesenke im Galerkin-System wird die Amplitude der Galerkin-Lösung erwartungsgemäß zu groß vorhergesagt. Der Amplitudenüberschuss ist in beiden Fällen eine Größenordnung über

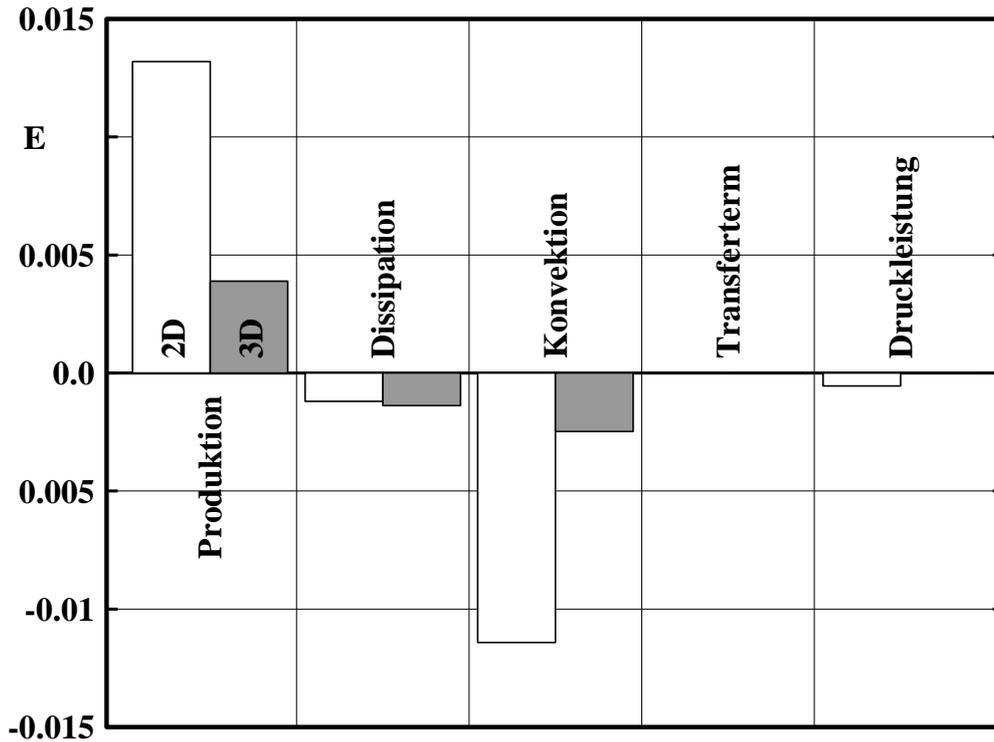


Abbildung. 5.12: Energiefluss-Terme für die 2D und 3D Scherschicht bei  $Re = 150$ . Im Histogramm sind die fünf Bilanz-Terme für die Fluktuationsenergie im Gebiet II dargestellt. Die weißen und dunklen Balken beziehen sich auf die 2D und 3D Strömung, respektive. Man beachte, dass die Werte der 3D Scherschicht mit der spannweiten Wellenlänge normiert sind, d.h. alle Terme entsprechen einem Energiefluss pro Längeneinheit in spannweitung Richtung.

dem Verhältnis von Druckleistung zur Produktion. Diese Verstärkung des Fehlers im Galerkin-Modell hängt mit der geringen strukturellen Stabilität des dynamischen Systems gegen Störungen zusammen und wird durch Hinzunahme einer Verschiebungsmode gemildert [84]. Die Verschiebungsmode ändert nicht den Grenzzyklus.

Das Druckterm-Modell kann auch für turbulente Scherschichten eine wichtige Rolle spielen, insbesondere wenn die Wirbeldynamik durch 2D Prozesse, wie Wirbelpaarungen, geprägt ist [82].

Abschließend soll kurz ein wichtiger Aspekt der Galerkin-Modellierung von konvektiv instabilen Strömungen erörtert werden. Das Fluktuationsniveau wird in der Navier-Stokes-Simulation maßgeblich von der Einströmfluktuation und der räumlichen Anfachungsrate bestimmt. Das räumliche Wachstum wird den Karhunen-Loève-Moden aufgeprägt, aber woher ‚weiß‘ das Galerkin-Modell die Amplituden  $A_{2D}$ ,  $A_{3D}$  der Einströmfluktuation? Das Galerkin-Modell bezieht diese Informa-

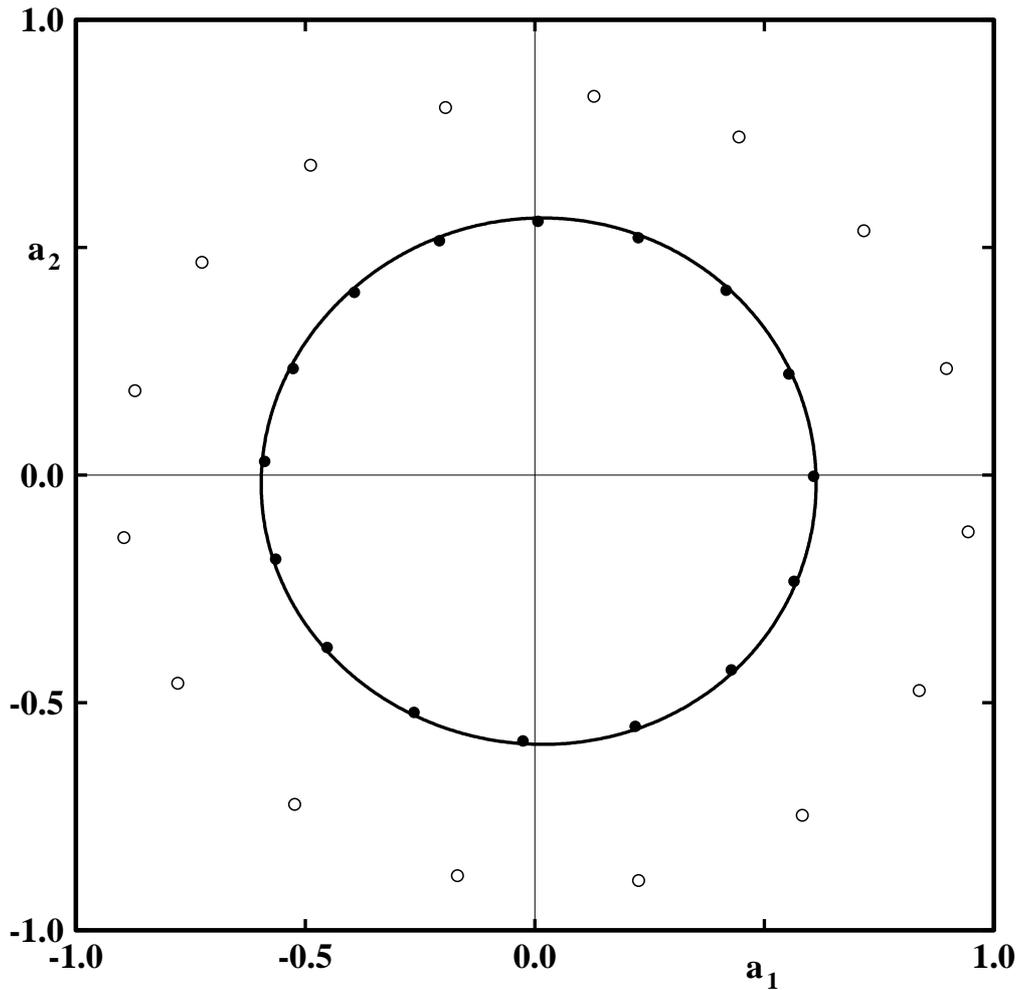


Abbildung. 5.13: Phasen-Portrait der laminaren Scherschicht von Abb. 5.3. Gezeigt wird der Grenzyklus aus den ersten beiden Fourier-Koeffizienten  $a_1, a_2$ . Die durchgezogene Kurve repräsentiert die direkte numerische Simulation, die Symbole die Galerkin-Lösungen ohne ( $\circ$ ) und mit Druckmodell ( $\bullet$ ).

tion indirekt aus der mittleren Strömung. Die Scherschichtdicke weitet sich stromabwärts mit zunehmenden Amplituden stärker auf durch die zugehörigen Reynolds-Spannungen. Die mittlere Strömung bestimmt somit die Amplitude, bei der das Galerkin-Modell das Energiefluss-Gleichgewicht findet. Diese Amplitudenselektion im Galerkin-Modell führt zu dem richtigen Attraktor — jedoch erst nach vielen hundert Perioden. Hingegen schwingt die Navier-Stokes-Lösung nach 1.5 Perioden weitgehend ein. Dies ist die Laufzeit eines Wirbels durch das gesamte Rechengebiet. Die Transienten werden schon in der Galerkin-Approximation nicht realistisch in dem Galerkin-Modell abgebildet. Eine Lösung ist ein kürzeres Beobachtungsgebiet. Dadurch wird die Amplitudenselektion jedoch sehr empfindlich von kleinsten Fehlern beeinflusst. Eine robuste-

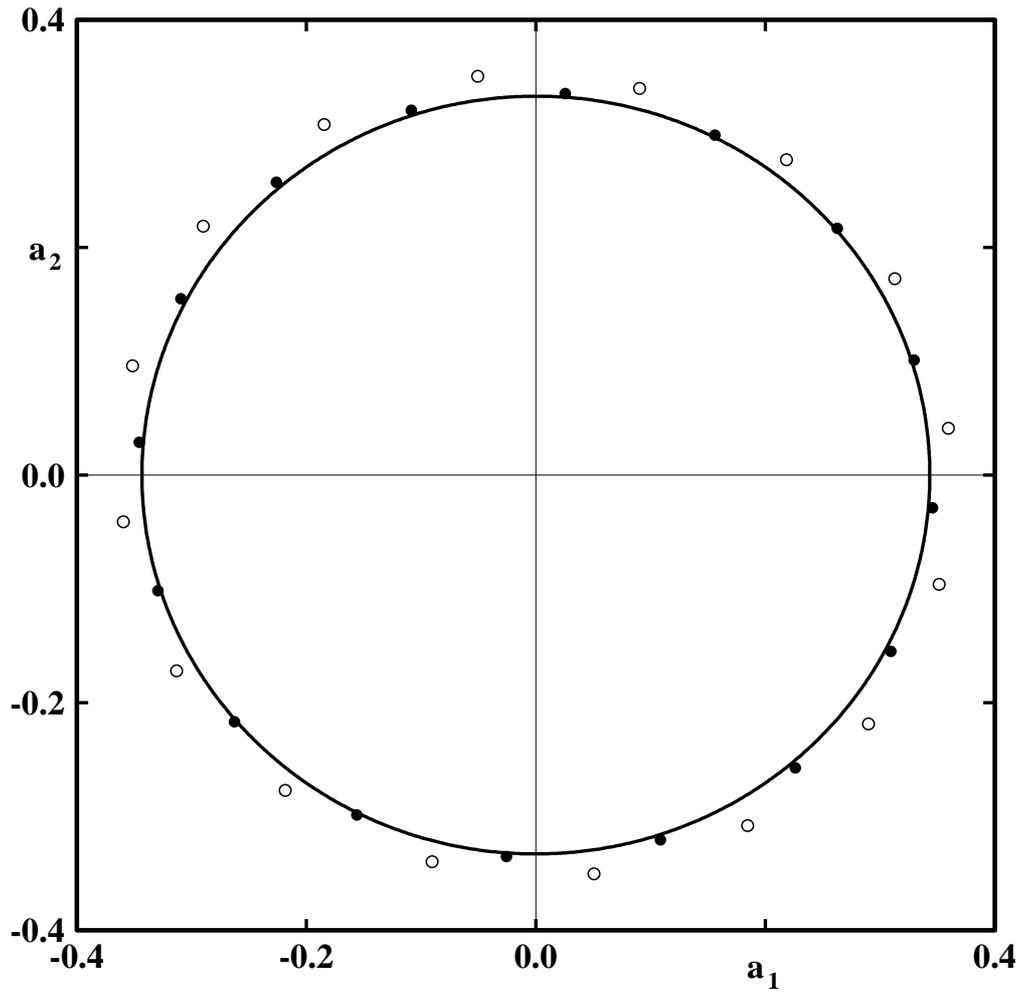


Abbildung. 5.14: Wie Abb. 5.13, jedoch für die transitionelle Scherschicht von Abb. 5.9.

re Lösung besteht in der Verwendung durch eine viel höhere Anzahl von geeigneten Moden aus einschwingenden Strömungen [84].

## 6. Weiterentwicklungen für komplexere Strömungen und für die Strömungsregelung

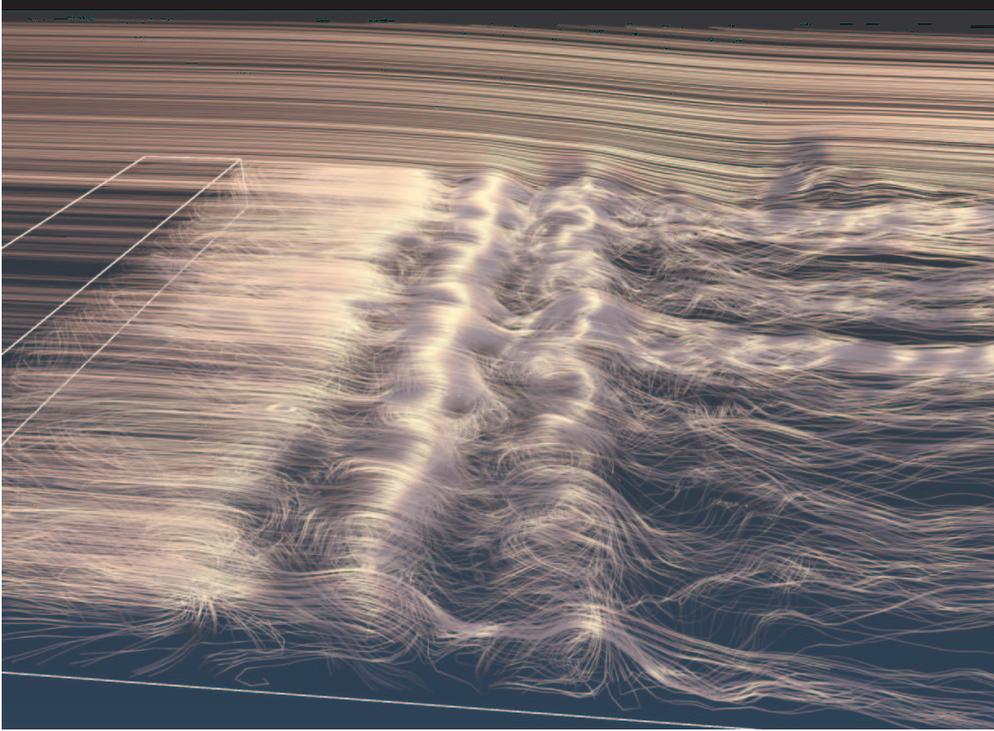
Die vorgestellten Neuerungen des empirischen Galerkin-Verfahrens haben in jüngster Zeit zahlreiche Erweiterungen für praxisnähere Probleme erfahren. Diese Ergänzungen sollen für turbulente Strömungen in §6.1 und für die Strömungsregelung in §6.2 schlaglichtartig beleuchtet werden. Es entsteht ein System mit Bausteinen, welches eine systematische Entwicklung von niederdimensionalen Galerkin-Modellen nach den konkreten Konfigurationsanforderungen erlaubt. Dieses System ist in §6.3 skizziert und bezieht auch komplexere Physik, z.B. Kompressibilität und Verbrennung, mit ein.

### 6.1 Galerkin-Modellierung von turbulenten Strömungen

Selbst bei turbulenten Strömungsdaten mit dominanten Grobstrukturen kann nur ein Teil der Fluktuationsenergie in einem Modell mit 20–40 Moden dynamisch aufgelöst werden. Dieser Anteil kann zwischen 30% [112] bei einer transitionellen Stufenströmung (siehe Abb. 6.1) und 80% [90] bei einer turbulenten Scherschicht liegen. Modellierungen von LES-Daten zeigen, dass es nicht auf die Kleinheit des Energieresiduums ankommt, sondern darauf, dass die augenfälligen Grobstrukturen in der Galerkin-Approximation enthalten sind. Die dynamisch nicht aufgelösten Skalen beeinflussen die aufgelösten Grobstrukturen und werden in dem Galerkin-System durch Zusatzterme modelliert. Hierbei wird ein modaler Wirbelviskositäts-Ansatz von [95] übernommen. Die Grundidee ist die gleiche wie bei dem Wirbelviskositäts-Modell in den Reynolds-gemittelten Gleichungen und in den Large-Eddy-Simulationen. Die nicht aufgelösten Strukturen wirken danach auf die modellierten Fluktuationen wie eine zusätzliche, modenabhängige Viskosität  $\nu_{T,i}$ , d.h.

$$\frac{da_i}{dt} = (\nu + \nu_{T,i}) \left[ \sum_{j=0}^N l_{ij} a_j \right] + \sum_{j,k=0}^N q_{ijk} a_j a_k. \quad (6.1)$$

Die Wirbelviskosität  $\nu_{T,i}$  wird so bestimmt, dass die Zeitentwicklung der Koeffizienten  $\mathbf{a}^{\text{NS}}$  aus der



**Abbildung. 6.1:** *Visualisierung eines LES Schnappschusses der transitionellen Strömung über eine rückwärts gewandte Stufe. Die Reynolds-Zahl bezogen auf die Anströmgeschwindigkeit und Stufenhöhe beträgt 3000. Die Randbedingungen sind in [43] beschrieben. Die dargestellte Stromlinienvisualisierung ist [126] entnommen.*

Navier-Stokes-Simulation gut von der Lösung  $\mathbf{a}^{\text{GM}}$  des Galerkin-Systems reproduziert werden. Die entsprechenden in der Literatur gebräuchlichen Kalibrierungs-Ansätze lassen sich in drei Gruppen einteilen:

- 1. Kinematische Kalibrierung (Floquet-Bild):** Ziel ist die Minimierung des Lösungsfehlers auf einem meist kleinen Zeitintervall  $t \in [0, T]$ ,

$$\chi_0^2 := \frac{1}{T} \int_0^T dt \|\mathbf{a}^{\text{GM}} - \mathbf{a}^{\text{NS}}\|^2 = \min, \quad (6.2)$$

wobei als Anfangsbedingung der Wert der Referenzsimulation genommen wird,  $\mathbf{a}^{\text{GM}}(0) = \mathbf{a}^{\text{NS}}(0)$ .

- 2. Dynamische Kalibrierung (Poincaré-Bild):** Ziel ist die Minimierung des Fehlers des

Flusses in einem beliebig langen Zeithorizont  $t \in [0, T]$ ,

$$\chi_1^2 := \frac{1}{T} \int_0^T dt \|\dot{\mathbf{a}}^{\text{NS}} - \mathbf{f}(\mathbf{a}^{\text{NS}})\|^2 = \min. \quad (6.3)$$

**3. Energetische Kalibrierung:** Ziel ist die Erfüllung der modalen Energiebilanz-Gleichungen. Ersetzt man bei der Herleitung von (3.39)  $\nu$  durch  $\nu + \nu_{T,i}$  folgt

$$0 = \mathcal{P}_i + \left(1 + \frac{\nu_{T,i}}{\nu}\right) \mathcal{D}_i + \mathcal{C}_i + \mathcal{T}_i + \mathcal{F}_i. \quad (6.4)$$

Diese Konsistenzbedingung bestimmt eindeutig die modalen Wirbelviskositäten.

Alternativ kann die Energiebilanz-Gleichung im Galerkin-Phasen-Raum aufgestellt werden,

$$\overline{a_i^{\text{NS}} \mathbf{e}_i \cdot [\dot{\mathbf{a}}^{\text{NS}} - \mathbf{f}(\mathbf{a}^{\text{NS}})]} = \overline{a_i^{\text{NS}} f_i(\mathbf{a}^{\text{NS}})} = 0. \quad (6.5)$$

Die kinematische Kalibrierung [31, 90] erlaubt konstruktionsgemäß die optimale Darstellung der Navier-Stokes-Lösung über den gewählten Zeitraum mit den gewählten Anfangsbedingungen. Dieses Verfahren konvergiert jedoch nicht für  $T \rightarrow \infty$  wegen des sich aufakkumulierenden Phasenfehlers im Galerkin-Modell. Diese Phasenfehler können zu unbrauchbaren Ergebnissen führen [113].

Die dynamischen [123] und energetischen Kalibrierungen [19, 90, 112] konvergieren im Limes großer Zeiten. Bei Untersuchungen der turbulenten Scherschicht ergaben sich vergleichbare Resultate [82, 83, 90].

## 6.2 Galerkin-Modellierung für die Strömungsregelung

Eine zentrale Aufgabe der Strömungsregelung ist die Ableitung eines Regelungsgesetzes. In diesem Gesetz wird die Aktuation aus den gemessenen Sensorinformationen idealer Weise so abgeleitet, dass die Grobstrukturen mit kleinem Aufwand effizient im Sinne des Beeinflussungszieles manipuliert werden. Solche Regelungsstrategien werden aus den empirischen Galerkin-Modellen mit regelungstechnischen Verfahren abgeleitet und zur Strömungsregelung im Experiment und in der Simulation eingesetzt [8, 83, 115, 123]. Die Anforderungen an die Galerkin-Modelle für Regelungszwecke sind deutlich höher als für die Analyse und Reproduktion einer natürlichen Strömung. Drei Aufgaben sind zu erfüllen:

1. **Beschreibung der Aktuationswirkung auf die Strömung.** Dies beinhaltet die natürlichen und beeinflussten Transienten. Das Modell muss also einen größeren dynamischen Bereich abdecken als die natürliche Strömung.
2. **Ableitung von Regelungsgesetzen,** welche für jeden Strömungszustand eine zielführende Aktuation bestimmen. Dies setzt Einschränkungen an die Form des dynamischen Systems voraus.
3. **Ableitung von Beobachtern,** welche aus meist wenigen Messdaten diesen Strömungszustand abschätzen. Dies setzt ähnliche Einschränkungen an das dynamische System voraus wie bei der Reglersynthese.

Im Folgenden werden die Weiterentwicklungen des Galerkin-Verfahrens für diese Aufgaben skizziert.

1. **Aktuation mit einer Volumenkraft.** Die Lorentz-Kraft in der Magnetohydrodynamik und die Auftriebskraft in der Boussinesq-Näherung sind Beispiele, wie der Strömung Volumenkräfte aufgeprägt werden. Typischerweise kann die Volumenkraft  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$  durch eine Galerkin-Approximation mit  $N_G$  ortsabhängigen Trägerfeldern  $\mathbf{g}_\gamma(\mathbf{x})$ ,  $\gamma = 1, \dots, N_G$  und zeitabhängigen Amplituden  $G_\gamma(t)$ ,  $\gamma = 1, \dots, N_G$  beschrieben werden,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{\gamma=1}^{N_G} G_\gamma(t) \mathbf{g}_\gamma(\mathbf{x}).$$

Diese führt zu einem zusätzlichen Term  $\mathbf{B} \mathbf{G}$  in dem Galerkin-System [37, 57, 83],

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{B} \mathbf{G}, \quad (6.6)$$

wobei  $\mathbf{G}$  der Vektor aus den Aktuationsamplituden und  $\mathbf{B}$  eine  $N \times N_G$ -Matrix darstellt.

2. **Aktuation mit randinduzierten Geschwindigkeiten:** Eine oszillatorische Anströmung und ein akustischer Aktuator in einer Wand sind Beispiele, wie durch eine zeitabhängige Geschwindigkeit  $\mathbf{u}_{RB}(\mathbf{x}, t)$  am Gebietsrand  $\partial\Omega$  die Grobstrukturen im Gebiet  $\Omega$  manipuliert werden. Diese Randaktuation führt per se zu keinen zusätzlichen Termen in der Navier-Stokes-Gleichung, d.h. sie kann das Galerkin-System nicht verändern. Typischerweise kann die Randgeschwindigkeit durch eine Galerkin-Approximation mit  $N_W$  ortsabhängigen Geschwindigkeitsmoden  $\mathbf{u}_i(\mathbf{x})$ ,  $i = -N_W, \dots, -1$  und zeitabhängigen Amplituden  $a_i(t)$ ,  $i = -N_W, \dots, -1$  beschrieben werden [8, 35, 83, 94],

$$\mathbf{u}_{RB}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=-N_G}^{-1} a_i(t) \mathbf{u}_i(\mathbf{x}).$$

Die Fortsetzung dieser Entwicklung der Randgeschwindigkeit in das gesamte Strömungsfeld ist ein wichtiger Designparameter und führt zu Aktuationsmoden  $\mathbf{u}_i(\mathbf{x})$ . Damit lässt sich die Strömung darstellen durch eine verallgemeinerte Galerkin-Entwicklung

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=-N_G}^N a_i(t) \mathbf{u}_i(\mathbf{x}).$$

Hierbei sind die Fourier-Koeffizienten mit negativen Indizes,  $a_i$ ,  $i = -N_W, \dots, -1$ , frei wählbare Aktuationsamplituden und Fourier-Koeffizienten mit positiven Indizes genügen dem verallgemeinerten Galerkin-System [83]

$$\sum_{j=-N_W}^N m_{ij} \frac{da_j}{dt} = \nu \sum_{j=-N_W}^N l_{ij} a_j + \nu \sum_{j,k=-N_W}^N q_{ijk} a_j a_k. \quad (6.7)$$

Die Massenmatrix  $(m_{ij})$  ist für  $i, j > 0$  eine Einheitsmatrix, d.h.  $m_{ij} = \delta_{ij}$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, N$ . Die Aktuation geht nun additiv, multiplikativ und nichtlinear in die Dynamik ein. Durch eine Transformation [89, 94] lässt sich (6.7) in eine Gleichung der Form (6.6) überführen.

3. **Reglerentwurf:** Ein physikalisch naheliegender Weg in die Dynamik einzugreifen ist die energie-basierte Regelung. Der Einfachheit halber soll von einer Volumenkraft mit einer Amplitude ausgegangen werden. Dies führt zu einer Dynamik der Form

$$\frac{da_i}{dt} = f_i(\mathbf{a}) + g_i G.$$

Sei

$$K = \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i^2 / 2$$

die Energie in den Moden mit Indizes  $i \in \mathcal{I}$ , die zu unterdrücken oder anzufachen sind. Für die zeitliche Ableitung gilt

$$\frac{dK}{dt} = \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i [f_i(\mathbf{a}) + g_i G].$$

Die Wunschdynamik sei ein exponentieller Abfall oder ein entsprechendes Wachstum,

$$\frac{dK}{dt} = \sigma K.$$

Gleichsetzung der rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen führt formal zu einer Bestimmungsgleichung für die Aktuation  $G$ ,

$$G = \frac{\sum_{i \in \mathcal{I}} a_i \left[ \sigma \frac{a_i}{2} - f_i(\mathbf{a}) \right]}{\sum_{i \in \mathcal{I}} a_i g_i}.$$

Zur Vermeidung großer Amplituden wird die Wunschdynamik in kurzzeitgemittelter Form formuliert oder eine Amplitudenbeschränkung eingeführt. Mit diesen energie-basierten Verfahren konnten erfolgreich Regler entwickelt werden, welche sowohl die Nachlaufinstabilität in der Navier-Stokes-Simulation reduziert haben [34] als auch das Fluktuationsniveau von 3D Kanalströmungen gesenkt haben [113]. Andere nichtlineare Reglerentwürfe führten zu vergleichbaren Erfolgen [46].

Ein wichtiger Aspekt bei allen Reglerentwürfen ist, dass die Galerkin-Modelle nur eine begrenzte Gültigkeit haben. Dieser Gültigkeitsbereich darf von den Reglern nicht überschritten werden [122].

- 4. Beobachter:** Der Regler 'blickt in die Zukunft' und passt durch die Aktuation die zukünftige Systementwicklung der Wunschdynamik an. Dies setzt die vollständige Kenntnis des Strömungszustandes voraus. Diese Kenntnis kann in der Navier-Stokes-Simulation vorausgesetzt werden, im Experiment werden jedoch nur wenige Größen  $\mathbf{S} := (S_1, S_2, \dots, S_S)$  gemessen. Der Beobachter 'blickt in die Vergangenheit' und nutzt die Dynamik, um den aktuellen Strömungszustand — approximiert durch die Fourier-Koeffizienten  $\mathbf{a}$  — aus den Messdaten zu rekonstruieren. Im Fall des dynamischen Beobachters wird von dem linearen Zusammenhang  $\mathbf{S} = \mathbf{C} \mathbf{a}$  ausgegangen, wobei  $\mathbf{C}$  eine Matrix darstellt. Der geschätzte Zustand  $\hat{\mathbf{a}}$  lässt sich durch Vergleich zwischen Messdaten  $\mathbf{S}$  und den vorhergesagten Werten  $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{C} \hat{\mathbf{a}}$  bewerten. Die Veränderung des geschätzten Zustandes wird durch das modifizierte Galerkin-System beschrieben,

$$\frac{d\hat{\mathbf{a}}}{dt} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{a}}) + \mathbf{L} [\mathbf{S} - \hat{\mathbf{S}}].$$

Sind die gemessenen und geschätzten Strömungsgrößen in Übereinstimmung, braucht die Dynamik nicht korrigiert zu werden und es verschwindet der Korrekturterm  $\mathbf{L} [\mathbf{S} - \hat{\mathbf{S}}]$ . Im Fall der Differenz ist die Matrix  $\mathbf{L}$  so zu gestalten, dass der Fehler  $\mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}$  exponentiell verschwindet. Dieser Ansatz wurde mit Erfolg in [33, 34] für die Nachlaufstabilisierung eingesetzt. Alternativ kann ein Kalman-Filter mit vergleichbaren Resultaten eingesetzt werden [54].

- 5. Hierarchische Modensysteme:** Die Hauptstärke und Hauptschwäche von empirischen Galerkin-Modellen liegt in ihrer Niederdimensionalität. Zum einen wird dadurch der Regler- und Beobachterentwurf erst ermöglicht. Zum anderen wird dadurch zwangsläufig der Gültigkeitsbereich eingeschränkt. Der Gültigkeitsbereich kann durch die Konstruktion viel höherdimensionaler Modelle anhand von Transienten oder von zusätzlichen Strömungsdaten deutlich erweitert werden [8, 42, 58]. Jedoch geht dadurch ein wesentlicher Vorteil

verloren, nämlich die Möglichkeit eines fehlertoleranten Regler- und Beobachterentwurfs [105]. Die Niederdimensionalität wirkt als Filter, der alle unwesentlichen Prozesse ignoriert. In höherdimensionalen Modellen sind mehr Möglichkeiten der Fehlerverstärkung gegeben. Ein zweiter Weg liegt in der Nachkalibrierung des Galerkin-Modells durch aktuelle Strömungsdaten der geregelten Strömung [1, 34, 37]. Dieser Ansatz kann einfach und vorteilhaft in der Navier-Stokes-Simulation eingesetzt werden. Jedoch ist die Implementation dieses Verfahrens im Experiment offensichtlich schwierig.

Ein Ausweg für eine experimentell nutzbare modellbasierte Strömungsregelung ist gängigen 'Lookup-Table'-Regelungen von Triebwerken und anderen Maschinen entlehnt. Hierbei wird ein hierarchisches Modensystem der Form

$$\mathbf{u}^{[N\mathcal{z}]} = \sum_{i=0}^N a_i^{\mathcal{z}}(t) \mathbf{u}_i^{\mathcal{z}}(\mathbf{x})$$

entwickelt [52, 54]. Unterschiedliche Strömungszustände, charakterisiert durch einen Parameter  $\mathcal{z}$ , werden mit unterschiedlichen Modensystemen beschrieben. Nach Schätzung dieses Parameters aus den Sensordaten kann der Beobachter- und Reglerentwurf weiterhin in einem überschaubaren niederdimensionalen Modell erfolgen. Dieser Ansatz wurde zur Nachlaufstabilisierung erfolgreich eingesetzt.

In Tabelle 6.1 werden die Neuerung des Galerkin-Verfahrens zusammengefasst.

### 6.3 Aktuelles System mit Galerkin-Bausteinen und zukünftige Entwicklungen

Bisher wurden inkompressible Strömungen mit einer dominierenden periodischen Grobstruktur betrachtet. Bei Strömungen mit komplexerer Dynamik, z.B. dem breitbandigen Frequenzspektrum eines Freistrahls, ist mit einer viel größeren Modenanzahl der Größenordnung von 100 für realistische Modelle zu rechnen [27]. Niederdimensionale Modelle sind nur in kleinen Bereichen möglich [125]. Wahrscheinlich dürften zukünftige Entwicklungen zu räumlich gekoppelten niederdimensionalen Modellen führen — analog zu Diskontinuierlichen Galerkin-Methoden hoher Ordnung in der numerischen Strömungsmechanik.

Die Einbindung komplexer Physik in niederdimensionale empirische Galerkin-Modelle wird aktiv von vielen Forschergruppen vorangetrieben. Diese Entwicklungen bei kompressiblen, reagierenden

Tabelle. 6.1: Neuerungen des empirischen Galerkin-Verfahrens für verschiedene Anwendungen

Anwendung	eingeschwungene Strömung	natürliche Transienten	aktuierte Transienten
Eingangsdaten	Simulation von natürlicher Strömung	Stabilitätsanalyse der stationären Navier-Stokes-Lösung	Simulation von aktuierten Strömungen
Modenentwicklung	Karhunen-Loève-Zerlegung	Ergänzung: stationäre Navier-Stokes-Lösung, Stabilitätseigenmoden	Hierarchische Modensysteme
Analyse und Beeinflussung der Dynamik	Analyse: <ul style="list-style-type: none"> <li>• modale Druckleistung</li> <li>• modale Effizienz</li> </ul>	Beobachter: <ul style="list-style-type: none"> <li>• dynamische B.</li> <li>• Kalman-Filter</li> </ul>	Regler: <ul style="list-style-type: none"> <li>• energie-basiert</li> <li>• nichtlinear</li> </ul>
Modelle der Dynamik	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Druckmodell</li> <li>• Turbulenzmodell (Kalibrierung)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Verschiebungsmoden</li> <li>• Nichtgleichgewichtsmoden</li> </ul>	Hierarchische Modelle mit $\varkappa$ -Schätzung
Galerkin System	fragil (monofrequent)	robust (weitgehend monofrequent)	regelungsorientiert (breites Frequenzband)

und anderen Strömungen führen (i) zu neuen Hilbert-Räumen mit vereinfachten kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen [106], (ii) zum Ausweichen auf die Wirbeltransport-Gleichung [53], (iii) zu separaten Karhunen-Loève-Zerlegungen für das Geschwindigkeitsfeld und für andere Variablen [111], (iv) zur Postulierung und Kalibrierung von linearen Zusammenhängen statt apriori Herleitungen [31] um nur wenige Beispiele zu nennen. Der Versuch einer systematischen Darstellung würde den Rahmen vorliegender Arbeit sprengen.

Abschließend wird der Galerkin-Baukasten zusammengefasst für inkompressible Strömungen mit einfacher oder komplexer Dynamik.

1. **Eingeschwungene, natürliche, laminare, inkompressible Innenströmung:** Dies ist der Ausgangspunkt vorliegender Arbeit und wird bereits in [38] beschrieben.
2. **Außenströmung:** Hier ist die Notwendigkeit eines Druckmodells zu überprüfen. Während das analytische Modell auf dem Poisson-Gleichungs-Löser basiert, gibt es auch eine empirische Variante [84], welche nur Druckdaten benötigt.

3. **Turbulente Strömung:** Zur Modellierung der nicht aufgelösten Fluktuation haben sich die Rempfer'schen modalen Wirbelviskositäten bewährt [95]. Die Kalibrierung der Parameter kann mit einer modalen Energiefluss-Bilanz erfolgen.
4. **Einschwingende Strömung:** Die Änderung der Grundströmung kann mit einer oder mehreren Verschiebungsmoden aufgelöst werden. Für die Änderung der Grobstruktur gibt es viele in vorliegender Arbeit diskutierte Ansätze, z.B. Stabilitätseigenmoden. In jedem Fall werden von der Transiente oder von zusätzlichen Strömungszuständen Daten für eine verallgemeinerte Galerkin-Entwicklung benötigt.
5. **Volumenkraft:** Die Einbindung einer Volumenkraft in das Galerkin-System ergibt sich aus einer Galerkin-Projektion auf die Navier-Stokes-Gleichung.
6. **Randaktuation:** Die empirische Galerkin-Modellierung kann prinzipiell für jedes Untergebiet mit instationären Randbedingungen durchgeführt werden [97]. Soll die Randaktuation als freier Parameter in die Galerkin-Modellierung eingeführt werden, kann dies durch zusätzliche Aktuationsmoden erreicht werden.
7. **Komplexe Einschwingvorgänge:** Oszillatorische Einschwingvorgänge können bei einem breiten durchfahrenen Frequenzband eine hochdimensionale Galerkin-Approximation notwendig machen. Diese Dimension kann mit hierarchischen Modenentwicklungen auf ein Minimum gesenkt werden.
8. **Komplexe Dynamik:** Die Dimension  $N$  eines empirischen Galerkin-Modells steigt bei komplexer Dynamik signifikant mit der Gebietsgröße. Der Rechenaufwand steigt mit  $N^3$  und kann die numerische Integration ähnlich aufwendig wie eine direkte Navier-Stokes-Simulation machen. Daher bieten sich auf Untergebieten gekoppelte Galerkin-Modelle an. Dieser Weg ist an der TU Berlin in absehbarer Zukunft geplant.
9. **Beobachter:** Beobachter können als Zusatzmodell fungieren, welche die direkte Simulationen und Galerkin-Modelle miteinander zeitlich synchronisieren.
10. **Regler:** Die Regler sind — wie die Beobachter — ein Bindeglied zwischen dem Galerkin-Modell und der modellbasierten Strömungsregelung.

Mit diesen Ergänzungen kann eine große Klasse von Strömungen durch empirische Galerkin-Modelle beschrieben werden.



## 7. Zusammenfassung und Ausblick

In vorliegender Arbeit werden Neuerungen für das empirische Galerkin-Verfahren vorgeschlagen und am Beispiel der laminaren und transitionellen Nachlauf- und Scherschicht-Strömungen untersucht. Diese Neuerungen betreffen eine modale Energiefluss-Analyse, eine analytische Darstellung des Druckterms im Galerkin-Modell und eine Verallgemeinerung des Ansatzes für Transienten. Damit konnte sowohl die schwach nichtlineare Stabilitätstheorie als auch die aus der Turbulenztheorie bekannte Energiefluss-Kaskade in einem monolithischen Ansatz integriert werden. Desweiteren wurde der Gültigkeitsbereich der Galerkin-Systeme z.T. deutlich erhöht und damit eine wichtige Voraussetzung für die Strömungsregelung auf der Basis dieser Galerkin-Modelle geschaffen.

Als Schlüssel für eine systematische Entwicklung und Überprüfung von empirischen Galerkin-Modellen wird die erste vollständige, modale Energiefluss-Analyse entwickelt. Bisherige Varianten haben den Druckterm entweder vernachlässigt [19] oder Konvektiv- und Druckterm in einer Größe zusammengefasst [97]. Da der Energiefluss durch jede Mode im Zeitmittel verschwinden muss, bietet die modale Energiefluss-Analyse eine Möglichkeit, die Genauigkeit der Eingangsdaten aus der Navier-Stokes-Simulation zu überprüfen und das Galerkin-Modell zu bewerten. Die Untersuchung der oben genannten Scherströmungen unterstreicht schon für periodische Strömungen den aus der Turbulenztheorie bekannten Sachverhalt, dass die Produktion von Fluktuationsenergie nur auf den großen Skalen geschieht, während die kleinen Skalen im Gleichgewicht zwischen Transferterm und Dissipation leben.

Als neuer Blickwinkel wurden Energiefluss-Effizienzen, d.h. das Verhältnis von modalen Energieflüssen und Energie in dieser Mode, eingeführt. Die Größe fasst Betrachtungen der Energiefluss-Kaskade, der Stabilitätsanalyse und von regelungstechnischen Verfahren zusammen. Die Energiefluss-Effizienzen haben die Dimension von Wachstumsraten und erlauben eine Abschätzung, wie schnell ein Energiefluss-Term die Energie einer Karhunen-Loève-Mode ändern würde. Für Stabilitätseigenmoden angewandt, ergeben die Energiefluss-Effizienzen zusammengesetzt die Wachstumsrate [69]. Im Rahmen der modellbasierten Strömungsregelung wird das Aktuationsgesetz so eingestellt, dass der zu unterdrückenden Instabilität im Mittel Energie entzogen wird, also eine negative Energiefluss-Effizienz aufgeprägt wird [123].

Eine überraschend wichtige Rolle bei der Galerkin-Modellierung offener Strömung kann der Druckterm spielen. Die Druckleistung kann für die von Kármán'sche Wirbelstraße in einem genügend großen Beobachtungsgebiet vernachlässigt werden. Diese Vereinfachung wurde in

früheren empirischen Galerkin-Modellen [20, 80] ausgenutzt. Jedoch ergibt sich für kleine Nachlaufbereiche eine positive Druckleistung und für die Scherschicht-Entwicklung eine negative Druckleistung, beides in der Größenordnung von einigen Prozent der Produktion. Interessant ist das unterschiedliche Vorzeichen. Das Beobachtungsgebiet des Nachlaufbereiches endet in einem Bereich, wo die Fluktuationsenergie abfällt, während die Scherschicht dort am Wachsen war. Es kann spekuliert werden, dass der Druck auf diese Weise versucht, stromabwärts eine Gleichverteilung der Fluktuationsenergie herzustellen. Dem zylindernahen Nachlauf wird durch die Druckleistung Energie zugeführt und so der Abfall reduziert. Der Scherschicht-Fluktuation entzieht der Druck Energie und bremst so das Wachstum in Strömungsrichtung. Eine analoge Rolle des Drucks ist aus der Scherturbulenz bekannt, wo der Druckterm eine Gleichverteilung der Fluktuationsenergie in alle drei Raumrichtungen fördert.

Der Bedeutung des Druckterms wurde durch die Entwicklung der ersten analytischen Druckterm-Darstellung im Galerkin-Modell Rechnung getragen. Dadurch braucht der Druckterm nicht implizit über die Wirbeltransport-Gleichung integriert zu werden, und die numerische Berechnung des Galerkin-Systems beruht nur auf Ableitungen nullter und erster Ordnung in den Geschwindigkeiten. Die Druckterm-Darstellung ermöglichte das erste niederdimensionale Galerkin-Modell für die laminare und transitionelle Scherschicht ohne empirische Nachkalibrierungen. Die hier untersuchten Scherströmungen mündeten in einer Faustformel für die Wirkung des Druckmodells auf die Galerkin-Lösung. Der relative Amplitudenfehler des Galerkin-Systems bei Vernachlässigung des Druckterms liegt bei der absolut instabilen Nachlaufströmung in der Größenordnung der relativen Druckleistung bezogen auf die Produktion. Bei den konvektiv instabilen Scherströmungen ist dieser Fehler eine Größenordnung höher. Diese Verstärkung des relativen Fehlers bei den Scherströmungen kann auf die strukturelle Instabilität des Galerkin-Ansatzes zurückgeführt werden. Der Ansatz setzt in den Moden eine räumlich synchronisierte Dynamik voraus, während die Scherschicht-Dynamik stromabwärts durch eine konvektive Anfachung charakterisiert wird.

Die verallgemeinerten Galerkin-Modelle der eingeschwungenen Scherströmungen reproduzieren die direkte numerische Simulation mit einem Fehler unter 1%. Jedoch werden die Anfachungsraten der Transienten in vorliegenden Untersuchungen um ein bis zwei Größenordnungen unterschätzt. In anderen Untersuchungen wird sogar über unrichtige Vorzeichen der vorhergesagten Anfachungsrate berichtet [116]. Rempfer (2000, [98]) vermutete, dass in der Karhunen-Loève-Zerlegung dynamisch wichtige Moden fehlen und konstruierte zur Dokumentation ein entsprechendes System aus 3 gewöhnlichen Differenzialgleichungen. Diese Vermutung wurde hier durch Einführung der Verschiebungsmode in einen verallgemeinerten Karhunen-Loève-Ansatz bestätigt.

Dadurch konnten die Nachlauftransienten schon mit einem dreidimensionalen Modell beschrieben werden. Dieses Minimalmodell wurde bereits erfolgreich zur modellbasierten Nachlaufstabilisierung eingesetzt [34].

Die Einführung von Stabilitätseigenmoden in die Galerkin-Approximation führte zu einem Modell, welches auch das Einschwingen des Nachlaufs mit der aus der Stabilitätstheorie bekannten Wachstumsrate reproduziert. Das resultierende Hybrid-Modell enthält sowohl das Stuart'sche Mean-Field-Modell als auch das POD Model von Deane et al. Bei der konvektiv instabilen Scherströmung hat die Verschiebungsmode eine stabilisierende Wirkung, die jedoch aus oben genannten prinzipiellen Gründen nicht eine einschwingende konvektive Instabilität quantitativ nachbilden kann.

Die hier dargelegten Neuerungen des empirischen Galerkin-Verfahrens waren Grundlage von Weiterentwicklungen für strömungsmechanische Probleme von Verkehrssystemen im Rahmen vieler fruchtbarer Kooperationen. Diese Weiterentwicklungen geschehen im Rahmen des Sonderforschungsbereichs (Sfb 557) „Beeinflussung komplexer turbulenter Scherströmungen“, der DFG-CNRS-Forschergruppe „Noise generation in turbulent flows“, der am CalTech beheimateten Multi University Research Initiative (MURI) „Closed-loop aerodynamic flow control“, mit Prof. Morzyński (Posen) und weiteren Kollegen. Die Weiterentwicklungen geschahen in jüngerer Zeit und beinhalten die modellbasierte Kontrolle von Prozessen in Nachbrennern [53], die Modellierung von turbulenten Strömungen aus LES-Daten [90], Nachlaufstabilisierungen in der Simulation [52] und eine modellbasierte Regelung im Experiment an einer rückwärts gewandten Stufenströmung [88].

Allein in den USA wird die modellbasierte Strömungsregelung zur Zeit mit vielen dem Sonderforschungsbereich vergleichbaren Zentren voran getrieben. Beispiele sind zwei MURIs (CalTech, GeorgiaTech), das Collaborative Center on Control Science (OSU) sowie weitere AFOSR geförderten Großforschungsvorhaben am United Technologies Research Center (UTRC) und anderen Instituten. Die stürmischen Entwicklungen auf dem Gebiet der modellbasierten Strömungsregelung werden genährt von der sich abzeichnenden Entwicklung, dass empirische Galerkin-Modelle entscheidend zur Reglerauslegung durch Postprocessing von numerischen und experimentellen Strömungsdaten beitragen können. Einige technische Herausforderungen, z.B. die Integration eines lokalen akustischen Aktuators in die niederdimensionalen Grobstruktur-Modelle, sind nicht befriedigend gelöst. Es zeichnet sich jedoch auch hierfür eine Lösung durch Hybridmodelle ab. Ein ganz wesentlicher Reiz der niederdimensionalen Modellierung ist, dass sie viele Disziplinen zusammenführt, z.B. die Strömungsmechanik in theoretischer, numerischer und experimenteller Prägung, die Regelungstechnik und die Theorie dynamischer Systeme, um nur wenige zu nennen.



# Literaturverzeichnis

- [1] K. AFANASIEV 2003 *Stabilitätsanalyse, niedrigdimensionale Modellierung und optimale Kontrolle der Kreiszyylinderumströmung*. Doktorarbeit, Fakultät Maschinenwesen, Technische Universität Dresden.
- [2] W.T. ASHURST & E. MEIBURG 1988 Experimental and numerical investigation of the three-dimensional transition in plane wakes. *J. Fluid Mech.* **190**, 1–37.
- [3] N. AUBRY, P. HOLMES, J.L. LUMLEY & E. STONE 1988 The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* **192**, 115–173.
- [4] D. BARKLEY & R.D. HENDERSON 1996 Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder. *J. Fluid Mech.* **322**, 215–241.
- [5] D. BARKLEY, L.S. TUCKERMAN & M. GOLUBITSKY 2000 Bifurcation theory for three-dimensional flow in the wake of a circular cylinder. *Phys. Rev. E* **61**, 5247–5252.
- [6] P.F. BATCHO 1994 *Global Spectral Methods for the Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations in Complex Geometries: The Generalized Stokes Eigensystem*. Doktorarbeit, Princeton University.
- [7] R. BECKER, M. GARWON, C. GUTKNECHT, G. BÄRWOLFF & R. KING 2002 Regelung aerodynamischer Strömungen am Beispiel einer rückwärtsgewandten Stufe. *Automatisierungstechnik* **50**, 79–86.
- [8] M. BERGMANN, L. CORDIER & J.-P. BRANCHER 2004 Optimal rotary control of the cylinder wake using POD reduced order model. *AIAA-Paper* **2004-2323**, 2nd AIAA Flow Control Conference.
- [9] L. BOBERG & U. BROSA 1988 Onset of turbulence in a pipe. *Z. Naturforsch.* **43a**, 697–726.
- [10] J. BOUSSINESQ 1877 Théorie de l'écoulement tourbillant. *Mem. Pre. par. div. Sav., Paris* **23**.
- [11] M. BRAZA, P. CHASSAING & H. HA MINH 1986 Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder. *J. Fluid Mech.* **165**, 79–130.
- [12] M. BREDE, H. ECKELMANN & D. ROCKWELL 1997 On secondary vortices in the cylinder wake. *Phys. Fluids* **8**, 2117–2124.

- [13] F.H. BUSSE 1991 Numerical analysis of secondary and tertiary states of fluid flow and their stability properties. *Appl. Sci. Res.* **48**, 341–351.
- [14] C.M. COATS 1997 Coherent structures in combustion. *Prog. Energy Combust. Sci.* **22**, 427–509.
- [15] L. COLLATZ 1960 *The Numerical Treatment of Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin.
- [16] P. COMTE, J.H. SILVESTRINI & P. BÉGOU 1998 Streamwise vortices in Large-Eddy Simulations of mixing layer. *Eur. J. Mech. B* **17**, 615–637.
- [17] G.S. COPELAND & B.R. NOACK 2000 *On the Landau model for vortex shedding*. Bericht **2/2000**, Hermann-Föttinger-Institut für Strömungsmechanik, Technische Universität Berlin.
- [18] G.H. COTTET & P. KOUMOUTSAKOS 2000 *Vortex Methods — Theory & Practice*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [19] M. COUPLET, P. SAGAUT & C. BASDEVANT 2003 Intermodal energy transfers in a proper orthogonal decomposition – Galerkin representation of a turbulent separated flow. *J. Fluid Mech.* **491**, 275–284.
- [20] A.E. DEANE, I.G. KEVREKIDIS, G.E. KARNIADAKIS & S.A. ORSZAG 1991 Low-dimensional models for complex geometry flows: Application to grooved channels & circular cylinders. *Phys. Fluids A* **3**, 2337–2354.
- [21] J. DUŠEK, P. LE GAL & P. FRAUNIE 1994 A numerical and theoretical study of the first Hopf bifurcation in a cylinder wake. *J. Fluid Mech.* **264**, 59–80.
- [22] M. FARGE, K. SCHNEIDER & N. KEVLAHAN 1999 Non-gaussianity and coherent vortex simulation for two-dimensional turbulence using an adaptive orthogonal wavelet basis. *Phys. Fluids* **11**, 2187–2201.
- [23] M.J. FEIGENBAUM 1978 Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.* **19**, 25–52.
- [24] H. FIEDLER, H. & H.-H. FERNHOLZ 1990 On the management and control of turbulent shear flows. *Progr. Aeronaut. Sci.* **27**, 305–387.
- [25] C.A.J. FLETCHER 1984 *Computational Galerkin Methods*. Springer-Verlag, New York.
- [26] C.A.J. FLETCHER 1988 *Computational Techniques for Fluid Dynamics; Volume II: Specific Techniques for Different Flow Categories*. Springer-Verlag, Berlin.

- [27] J.B. FREUND & T. COLONIUS 2002 POD analysis of sound generation by a turbulent jet. *AIAA-Paper 2002-0072*, 40th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit.
- [28] U. FRISCH 1995 *Turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [29] M. GAD-EL-HAK 2000 *Flow Control: Passive, Active & Reactive Flow Management*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [30] B.G. GALERKIN 1915 Rods and plates: series occurring in various questions regarding the elastic equilibrium of rods and plates (übersetzt). *Vestn. Inzhen.* **19**, 897–908.
- [31] G. GALLETTI, C.H. BRUNEAU, L. ZANNETTI & A. IOLLO 2004 Low-order modelling of laminar flow regimes past a confined square cylinder. *J. Fluid Mech.* **503**, 161–170.
- [32] M. GASTER 1962 A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability. *J. Fluid Mech.* **14**, 222–224.
- [33] J. GERHARD 2003 *Modellbasierter Reglerentwurf zur Unterdrückung der Kármánschen Wirbelstraße im Nachlauf eines umströmten Zylinders anhand niederdimensionaler Galerkinmodelle*. Diplomarbeit, Institut für Prozess- und Anlagentechnik, Technische Universität Berlin.
- [34] J. GERHARD, M. PASTOOR, R. KING, B.R. NOACK, A. DILLMANN, M. MORZYŃSKI & G. TADMOR 2003 Model-based control of vortex shedding using low-dimensional Galerkin models. *AIAA-Paper 2003-4262*, 33rd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit.
- [35] W.R. GRAHAM, J. PERAIRE & K.Y. TANG 1999 Optimal control of vortex shedding using low-order models. Part I – Open-loop model development. *Int. J. Numer. Meth. Engrng.* **44**, 945–972.
- [36] C.E. GROSCH & H. SALWEN 1978 The continuous spectrum of the Orr-Sommerfeld equation. Part I. The spectrum and the eigenfunctions. *J. Fluid Mech.* **87**, 33–54.
- [37] M. HINZE & K. KUNISCH 2000 Three control methods for time-dependent fluid flow. *Flow, Turbulence & Combustion* **65**, 273–298.
- [38] P. HOLMES, J.L. LUMLEY & G. BERKOOZ 1998 *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [39] E. HOPF 1948 A mathematical example displaying features of turbulence. *Commun. Pure & Appl. Math.* **1**, 303–322.
- [40] E. HOPF 1951 Statistical hydromechanics & functional analysis. *J. Rat. Mech. Anal.* **1**, 87–123.

- [41] P. HUERRE & P.A. MONKEWITZ 1990 Local and global instabilities in spatially developing flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473–537.
- [42] B.H. JØRGENSEN, J.N. SØRENSEN & M. BRØNS 2003 Low-dimensional modeling of a driven cavity flow with two free parameters. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics* **16**, 299–317.
- [43] H.-J. KALTENBACH & G. JANKE 2000 Direct numerical simulation of flow separation behind a swept rearward-facing step at  $Re_H = 3000$ . *Phys. Fluids* **12**, 2320–2337.
- [44] G.E. KARNIADAKIS & G.S. TRIANTAFYLLOU 1992 Three-dimensional dynamics and transition to turbulence in the wake of bluff bodies. *J. Fluid Mech.* **238**, 1–30.
- [45] A.I. Khibnik, S. NARAYANAN, C.A. JACOBSON & K. LUST 2000 Analysis of low dimensional dynamics of flow separation. In *Continuation Methods in Fluid Dynamics. Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Vol. **74**, S. 167–178, Vieweg.
- [46] R. KING, M. SEIBOLD, O. LEHMANN, B.R. NOACK, M. MORZYŃSKI & G. TADMOR 2005 Nonlinear flow control based on a low dimensional model of fluid flow. In T. MEURER, K. GRAICHEN & E.D. GILLES (Hrsg.), *Nonlinear flow control based on a low dimensional model of fluid flow*, S. 369–386, Springer-Verlag.
- [47] A.N. KOLMOGOROV 1941 Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **32**, 16–18 (übersetzt 1991 in *Proc. R. Soc. Lond. A* **434**, 15–17).
- [48] A.N. KOLMOGOROV 1941 The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **30**, 9–13 (übersetzt 1991 in *Proc. R. Soc. Lond. A* **434**, 9–13).
- [49] O.A. LADYZHENSKAYA 1963 *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon & Breach, New York, London.
- [50] L.D. LANDAU 1944 On the problem of turbulence. *C.R. Acad. Sci. USSR* **44**, 311–314.
- [51] L.D. LANDAU & E.M. LIFSHITZ 1987 *Fluid Mechanics*. Course of Theoretical Physics, Vol. 6, 2. Auflage, Pergamon Press, Oxford.
- [52] O. LEHMANN, M. LUCHTENBURG, B.R. NOACK, R. KING, M. MORZYŃSKI & G. TADMOR 2005 Wake stabilization using POD Galerkin models with interpolated modes. Tagungsbericht der *44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005*, Invited Paper **1618**.
- [53] F. LI, A. BANASZUK, G. TADMOR, B.R. NOACK & P.G. MEHTA 2006 A reduced order Galerkin model for the reacting bluff body flame holder. Eingeladenes *AIAA-Paper 2006-3487*, 3rd AIAA Flow Control Conference.

- [54] M. LUCHTENBURG, G. TADMOR, O. LEHMANN, B.R. NOACK, R. KING & M. MORZYŃSKI 2006 Tuned POD Galerkin models for transient feedback regulation of the cylinder wake. *AIAA-Paper* **2006-1407**, 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit.
- [55] J.L. LUMLEY 1967 The structure of inhomogeneous turbulent flows. In A.M. YAGLOM & V.I. TATARSKI (Hrsg.) *Atmospheric Turbulence & Wave Propagation*, S. 166–178.
- [56] J.L. LUMLEY 1970 *Stochastic Tools in Turbulence*. Academic Press, New York.
- [57] J.L. LUMLEY & P.N. BLOSSEY 1998 Control of turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **30**, 311–327.
- [58] X. MA & G.E. KARNIADAKIS 2002 A low-dimensional model for simulating three-dimensional cylinder flow. *J. Fluid Mech.* **458**, 181–190.
- [59] D.W. MCCOMB 1991 *The Physics of Fluid Turbulence*. Clarendon Press, Oxford.
- [60] R.W. METCALFE, S.A. ORSZAG, M.E. BRACHET, S. MENON & J.J. RILEY 1987 Secondary instability of a temporary growing mixing layer. *J. Fluid Mech.* **184**, 207–243.
- [61] A. MICHALKE 1964 On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile. *J. Fluid Mech.* **19**, 543–556.
- [62] M. MILLONSCHTCHIKOV 1941 On the theory of homogeneous isotropic turbulence. *C.R. Acad. Sci. U.S.S.R* **32**, 615.
- [63] J. MOEHLIS, H. FAISST & B. ECKHARDT 2004 A low-dimensional model for turbulent shear flows. *New J. Phys.* **6**, Artikel 56.
- [64] J. MOEHLIS, T.R. SMITH, P. HOLMES & H. FAISST 2002 Models for turbulent plane Couette flow using the proper orthogonal decomposition. *Phys. Fluids* **14**, 2493–2507.
- [65] A.S. MONIN & A.M. YAGLOM 1971 *Statistical Fluid Mechanics I*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts and London.
- [66] P.A. MONKEWITZ 1988 Subharmonic resonance, pairing and shredding in the mixing layer. *J. Fluid Mech.* **188**, 223–252.
- [67] P. MOON & D.E. SPENCER 1986 *Theory of Holors — A Generalization of Tensors*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [68] M. MORZYŃSKI, K. AFANASIEV & F. THIELE 1999 Solution of the eigenvalue problems resulting from global non-parallel flow stability analysis. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **169**, 161–176.

- [69] M. MORZYŃSKI, S. GOUJON-DURAND, B.R. NOACK, J.E. WESFREID & B. THIRIA 2005 Numerical analysis of the wake control behind a circular cylinder with oscillatory rotation. In W. GUTKOWSKI & T.A. KOWALEWSKI (Hrsg.) *Mechanics of the 21st Century, Proceedings of the 21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics 2004*, Springer-Verlag, Paper **FM11L\_12736**.
- [70] M. MORZYŃSKI, W. STANKIEWICZ, B.R. NOACK, R. KING, F. THIELE & G. TADMOR 2006 Continuous mode interpolation for control-oriented models of fluid flow. Akzeptiert für geplanten Tagungsbericht R. KING (Hrsg.), *Proceedings of the Active Flow Control Conference*(Berlin, 27.-29. Sep. 2006), Springer-Verlag.
- [71] S. NARAYANAN, B.R. NOACK, A. BANASZUK & A.I. Khibnik 2002 *Active separation control concept: Dynamic forcing of induced separation using harmonically related frequency*. United States Patent **6360763**.
- [72] S. NEWHOUSE, D. RUELLE & F. TAKENS 1978 Occurrence of strange Axiom-A attractors near quasiperiodic flow on  $t^m$ ,  $m \leq 3$ . *Comm. Math. Phys.* **64**, 35.
- [73] B.R. NOACK & H. ECKELMANN 1994 A global stability analysis of the steady and periodic cylinder wake. *J. Fluid Mech.* **270**, 297–330.
- [74] B.R. NOACK & H. ECKELMANN 1994 A low-dimensional Galerkin method for the three-dimensional flow around a circular cylinder. *Phys. Fluids* **6**, 124–143.
- [75] B.R. NOACK & U. DALLMANN 1995 *On models and theories for turbulent flows*. Bericht **IB 113-95 A33**, DLR-Institut für Strömungsmechanik, Göttingen.
- [76] B.R. NOACK 1999 On the flow around a circular cylinder. Part I: laminar and transitional regime. *Z. angew. Math. Mech.* **79**, S223–226.
- [77] B.R. NOACK 1999 On the flow around a circular cylinder. Part II: turbulent regime, *Z. angew. Math. Mech.* **79**, S227–230.
- [78] B.R. NOACK & G.S. COPELAND 2000 *On a stability property of ensemble-averaged flow*. Bericht **3/2000**, Hermann-Föttinger-Institut für Strömungsmechanik, Technische Universität Berlin.
- [79] B.R. NOACK, P. PAPAS & P.A. MONKEWITZ 2002 *Low-dimensional Galerkin model of a laminar shear-layer*. Bericht **2002-01**, Laboratoire de Mécanique des Fluides, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Schweiz.
- [80] B.R. NOACK, K. AFANASIEV, M. MORZYŃSKI, G. TADMOR & F. THIELE 2003 A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. *J. Fluid Mech.* **497**, 335—363.

- [81] B.R. NOACK, I. MEZIĆ, G. TADMOR & A. BANASZUK 2004 Optimal mixing in recirculation zones. *Phys. Fluids* **16** (4), 867–888.
- [82] B.R. NOACK, I. PELIVAN, G. TADMOR, M. MORZYŃSKI & P. COMTE 2004 Robust low-dimensional Galerkin models of natural and actuated flows. In W. SCHRÖDER & P. KÖLZSCH (Hrsg.) Tagungsbericht des *Fourth Aeroacoustics Workshop*, Institut für Akustik und Sprachkommunikation, Technische Universität Dresden.
- [83] B.R. NOACK, G. TADMOR & M. MORZYŃSKI 2004 Low-dimensional models for feedback flow control. Part I: Empirical Galerkin models. Eingeladenes *AIAA-Paper* **2004-2408**, 2nd AIAA Flow Control Conference.
- [84] B.R. NOACK, P. PAPAS, P.A. MONKEWITZ 2005 The need for a pressure-term representation in empirical Galerkin models of incompressible shear-flows. *J. Fluid Mech.* **523**, 339–365.
- [85] M. OBERLACK 2000 Symmetrie, Invarianz und Selbstähnlichkeit der Turbulenz. Habilitationsschrift, Fakultät für Maschinenwesen, Rheinisch-Westfälisch Technische Hochschule Aachen.
- [86] H. OERTEL 1990 Wakes behind blunt bodies. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 539–546.
- [87] M. PASTOOR, R. KING, B.R. NOACK, A. DILLMANN & G. TADMOR 2003 Model-based coherent-structure control of turbulent shear flows using low-dimensional vortex models. *AIAA-Paper* **2003-4261**, 33rd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit.
- [88] M. PASTOOR, R. KING, B.R. NOACK & G. TADMOR 2005 Observers & feedback control for shear layer vortices. Tagungsbericht der *44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005*, Invited Paper **1608**.
- [89] M. PASTOR, R. KING, B.R. NOACK & G. TADMOR 2004 Niederdimensionale Galerkin- und Wirbelmodelle zur modellbasierten Regelung von Scherströmungen. Tagungsbericht des „38. Regelungstechnisches Kolloquium in Boppard“.
- [90] I. PELIVAN, B.R. NOACK, P. COMTE & L. CORDIER 2005 A low-dimensional Galerkin model of the turbulent mixing layer. Bericht **01/2005**, Hermann-Föttinger-Institut für Strömungsmechanik, Technische Universität Berlin.
- [91] R. PEYRET 2002 *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*. Springer-Verlag, New York.
- [92] Y. POMEAOU & P. MANNEVILLE 1980 Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Commun. Math. Phys.* **74**, 189–197.

- [93] O. POSDZIECH & R. GRUNDMANN 2001 Numerical simulation of the flow around an infinitely long circular cylinder in the transition regime. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics* **15**, 121–141.
- [94] O.K. REDINIOTIS, J. KO & A.J. KURDILA 2002 Reduced order nonlinear Navier-Stokes models for synthetic jets. *J. Fluids Enrng.* **124**, 433–443.
- [95] D. REMPFER 1991 *Kohärente Strukturen und Chaos beim laminar-turbulenten Grenzschichtumschlag*. Doktorarbeit, Fakultät Verfahrenstechnik der Universität Stuttgart.
- [96] D. REMPFER & F.H. FASEL 1994 Evolution of three-dimensional coherent structures in a flat-plate boundary-layer. *J. Fluid Mech.* **260**, 351–375.
- [97] D. REMPFER 1995 *Empirische Eigenfunktionen und Galerkin-Projektionen zur Beschreibung des laminar-turbulenten Grenzschichtumschlags*. Habilitationsschrift, Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik, Universität Stuttgart.
- [98] D. REMPFER 2000 On low-dimensional Galerkin models for fluid flow. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics* **14**, 75–88.
- [99] D. REMPFER 2003 Low-dimensional modeling and numerical simulation of transition in simple shear flow. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **35**, 229–265.
- [100] O. REYNOLDS 1883 On the on the experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous and the law of resistance in parallel channels. *Phil. Trans. Roy. Soc.* **174**, 935–982.
- [101] O. REYNOLDS 1895 On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Phil. Trans. Roy. Soc.* **186**, A 123–164.
- [102] W.C. REYNOLDS & A.K.M.F. HUSSAIN 1972 The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Part 3. Theoretical model and comparisons with experiments. *J. Fluid Mech.* **54**, 263–288.
- [103] L.F. RICHARDSON 1922 *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [104] J. ROTTA 1972 *Turbulente Strömungen*. B.G. Teubner, Stuttgart.
- [105] C. ROWLEY & V. JUTTIJUDATA 2004 Control and estimation of oscillating cavity flows. Tagungsbericht des *57th Annual Meeting of the Division of Fluid Dynamics of the American Physical Society* (Bulletin Am. Phys. Soc., Vol. **49**, No. 9, AG.005).
- [106] C.W. ROWLEY, T. COLONIUS & R.M. MURRAY 2004 Model reduction for compressible flows using POD and Galerkin projection. *Physica D* **189**, 115–129.

- [107] D. RUELLE & F. TAKENS 1971 On the nature of turbulence. *Comm. Math. Phys.* **20**, 167–192.
- [108] D. RUELLE 1990 Deterministic chaos: The science and the fiction. *Proc. R. Soc. Lond. A* **427**, 241–248.
- [109] D. RUELLE 1991 The turbulent fluid as a dynamical system. In L. SIROVICH (Hrsg.) *New Perspectives in Turbulence*, S. 121–133, Springer-Verlag, New York.
- [110] B. RUMMLER 2000 *Zur Lösung der instationären inkompressiblen Navier-Stokesschen Gleichungen in speziellen Gebieten*. Habilitationsschrift, Fakultät für Mathematik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg.
- [111] R.A. SAHAN, A. LIAKOPOULOS & H. GUNES 1997 Reduced dynamical models of nonisothermal transitional grooved-channel flow. *Phys. Fluids* **9**, 551–565.
- [112] M. SCHLEGEL, B.R. NOACK & A. DILLMANN 2002 Low-dimensional Galerkin models of transitional shear flows. Tagungsbericht des *55th Annual Meeting of the Division of Fluid Dynamics of the American Physical Society* (Bulletin Am. Phys. Soc., Vol. **47**, No. 10, FP.006).
- [113] M. SCHLEGEL, B.R. NOACK & G. TADMOR 2004 *Low-dimensional Galerkin models and control of transitional channel flow*. Bericht **01/2004**, Hermann-Föttinger-Institut für Strömungsmechanik, Technische Universität Berlin.
- [114] H.G. SCHUSTER 1988 *Deterministic Chaos*. VCH Verlagsgesellschaft mbH, Weinheim, 2. Auflage.
- [115] S. SIEGEL, K. COHEN & T. MCLAUGHLIN 2003 Feedback control of a circular cylinder wake in experiment and simulation. *AIAA-Paper 2003-3571*, 33rd AIAA Fluids Conference and Exhibit.
- [116] S. SIRISUP & G.E. KARNIADAKIS 2004 A spectral viscosity method for correcting the long-term behavior of POD models. *J. Comp. Phys.* **194**, 92–116.
- [117] L. SIROVICH 1987 Turbulence and the dynamics of coherent structures, Part I: Coherent structures. *Quart. Appl. Math.* **XLV**, 561–571.
- [118] V.P. STARR 1965 *Physics of Negative Viscosity Phenomena*. McGraw-Hill, New York.
- [119] J.T. STUART 1958 On the non-linear mechanics of hydrodynamic stability. *J. Fluid Mech.* **4**, 1–21.
- [120] J.T. STUART 1967 On finite amplitude oscillations in laminar mixing layers. *J. Fluid Mech.* **29**, 417–440.

- [121] T. STYKEL & V. MEHRMANN 2005 Balanced truncation model reduction for large-scale systems in descriptor form. In P. BENNER, V. MEHRMANN & D SORENSEN (Hrsg) *Dimension Reduction of Large-Scale Systems*, Springer, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 45, S. 83–115.
- [122] G. TADMOR, B.R. NOACK, A. DILLMANN, J. GERHARD, M. PASTOOR, R. KING & M. MORZYŃSKI 2003 Control, observation and energy regulation of wake flow instabilities. Tagungsbericht der *42nd IEEE Conference on Decision and Control 2003*, Paper **WeM10-4**, S. 2334–2339.
- [123] G. TADMOR, B.R. NOACK, M. MORZYŃSKI & S. SIEGEL 2004 Low-dimensional models for feedback flow control. Part II: Controller design and dynamic estimation. Eingeladenes *AIAA-Paper 2004-2409*, 2nd AIAA Flow Control Conference.
- [124] A.A. TOWNSEND 1956 *The Structure of Turbulent Shear Flow*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [125] L. UKEILEY, L. CORDIER, R. MANCEAU, J. DELVILLE, J.P. BONNET & M. GLAUSSER 2001 Examination of large-scale structures in a turbulent plane mixing layer. Part 2. Dynamical systems model. *J. Fluid Mech.* **441**, 61–108.
- [126] T. WEINKAUF, H.-C. HEGE, B.R. NOACK, M. SCHLEGEL & A. DILLMANN 2003 Coherent structures in a transitional flow around a backward-facing step. *Phys. Fluids* **15**, S3 (Special Section: Gallery of Fluid Motion).
- [127] T. WEINKAUF, B.R. NOACK, P. COMTE, A. DILLMANN, H.-C. HEGE 2004 Coherent-structure skeleton of a turbulent mixing layer. Tagungsbeitrag für die „Gallery of Fluid Motion“ des *57th Annual Meeting of the Division of Fluid Dynamics of the American Physical Society* (Bulletin Am. Phys. Soc., Vol. **49**).
- [128] C.H.K. WILLIAMSON 1988 The existence of two stages in the transition to three-dimensionality of a cylinder wake. *Phys. Fluids* **31**, 3165–3167.
- [129] C.H.K. WILLIAMSON 1996 Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **28**, 477–539.
- [130] M.M. ZDRAVKOVICH 1997 *Flow Around Circular Cylinders, Volume 1: Fundamentals*. Oxford University Press, Oxford, New York, Tokyo.
- [131] A. ZEBIB 1987 Stability of viscous flow past a circular cylinder. *J. Engr. Math.* **21**, 155–165.
- [132] H.-Q. ZHANG, U. FEY, B.R. NOACK, M. KÖNIG & H. ECKELMANN 1995 On the transition of the cylinder wake. *Phys. Fluids* **7**, 779–794.

# A. Karhunen-Loève-Zerlegung einer Strömung

Die Beispiele aus §2.2 und §2.3 basieren auf einer analytisch durchgeführten Karhunen-Loève-Zerlegung. In diesem Abschnitt wird die numerische Durchführung an Strömungsdaten beschrieben. Hierbei werden die für die empirische Galerkin-Modellierung wichtigen Beziehungen rekapituliert. Für eine ausführliche Darstellung sei auf das Buch [38] verwiesen.

## A.1 Zerlegung im Ortsbereich

Das innere Produkt von zwei Vektorfeldern  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  in dem Gebiet  $\Omega$  sei — analog zu den vorangegangenen Beispielen — definiert durch

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega} := \int d\mathbf{x} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \quad (\text{A.1})$$

Der Integrand  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  repräsentiert das Euklidische Produkt zweier Vektoren.

Die zugehörige Energie-Norm lautet

$$\|\mathbf{u}\|_{\Omega} := \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\Omega}}. \quad (\text{A.2})$$

Die Entwicklung der Störung  $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$  um den zeitlichen Mittelwert  $\mathbf{u}_0 = \bar{\mathbf{u}}$  kann als Verfeinerung der Reynolds-Zerlegung betrachtet werden, wobei die Fluktuation in Beiträge von orthonormalen Moden zerlegt wird,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t), \quad (\text{A.3a})$$

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \mathbf{u}_i(\mathbf{x}), \quad (\text{A.3b})$$

$$a_i = (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}'). \quad (\text{A.3c})$$

Grundlage der räumlichen Galerkin-Entwicklung ist, dass die Strömung über das Gebiet  $\Omega$  nicht unkorreliert ist. Die Strömung sei beschrieben in einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Ort  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  und dem Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3)$ . Hierbei werden die  $x, y, z$ -Komponenten mit den Indizes 1,2,3, respektive, identifiziert. Die mittlere räumliche Korrelation

der  $l$ -ten und  $m$ -ten Geschwindigkeitskomponente wird beschrieben durch die Autokorrelationsfunktion

$$R_{lm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{u'_l(\mathbf{x}, t) u'_m(\mathbf{y}, t)}, \quad l, m = 1, 2, 3.$$

Die resultierende Matrix  $\mathbf{R} := (R_{lm})_{\substack{l=1,2,3 \\ m=1,2,3}}$  kann kompakt beschrieben werden nach Einführung des dyadischen Produkts zweier Vektoren  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ :

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} := \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Damit folgt

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{u}'(\mathbf{y}, t)}. \quad (\text{A.5})$$

Die Fredholm'sche Gleichung für die  $i$ -te Karhunen-Loève-Mode  $\mathbf{u}_i$  zum Eigenwert  $\lambda_i$  lautet

$$\int_{\Omega} d\mathbf{y} \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}_i(\mathbf{y}) = \lambda_i \mathbf{u}_i(\mathbf{x}). \quad (\text{A.6})$$

Die Moden werden nach Energiegehalt sortiert,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots$

Die Symmetrie der Autokorrelationsfunktion bedingt die Orthonormalität der Karhunen-Loève-Moden

$$(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)_{\Omega} = \delta_{ij}. \quad (\text{A.7})$$

Die ersten und zweiten statistischen Momente der Fourier-Koeffizienten sind

$$\overline{a_i} = 0, \quad (\text{A.8a})$$

$$\overline{a_i a_j} = \lambda_i \delta_{ij}. \quad (\text{A.8b})$$

Die Autokorrelationsfunktion lässt sich nach den Karhunen-Loève-Moden entwickeln

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{u}_i(\mathbf{y}). \quad (\text{A.9})$$

Der Reynolds-Tensor ist ein Spezialfall der Autokorrelationsfunktion mit  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ . Die Spur des Reynolds-Tensors stellt die zweifache lokale Fluktuationsenergie  $q$  dar, d.h.

$$q(\mathbf{x}) := \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 R_{ll}(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

Die Fluktuations-Energie im gesamten Gebiet folgt durch Aufintegration,

$$\mathcal{K}_\Omega = \frac{1}{2} \overline{(\mathbf{u}', \mathbf{u}')_\Omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i. \quad (\text{A.10})$$

Zur Bewertung der numerischen Durchföhrbarkeit der L6sung des Eigenwertproblems betrachten wir die Diskretisierung einer dreidimensionalen Str6mung auf einem Gitter mit 100 Punkten pro Raumrichtung. Die Autokorrelations-Funktion wird dann diskretisiert in einer  $3 \times 100^3 \times 3 \times 100^3 = 9 \times 10^{12}$  elementigen Matrix. Dies entspricht 64.5 TerraBytes von double precision (8 Byte) Zahlen und die numerische L6sung solcher Eigenwert-Probleme liegt langfristig jenseits der Machbarkeit.

## A.2 Zerlegung im Zeitbereich

Bei der Karhunen-Lo6ve-Zerlegung f6llt eine bemerkenswerte Symmetrie zwischen Ort und Zeit auf. Die Galerkin-Approximation (A.3b) kann sowohl als Entwicklung nach r6umlichen Moden  $\mathbf{u}_i$  mit zeitabh6ngigen Koeffizienten  $a_i$  gelesen werden als auch als Entwicklung nach zeitlichen Moden  $a_i$  mit ortsabh6ngigen Koeffizienten  $\mathbf{u}_i$ . Der Volumenintegration über den r6umlichen Bereich  $\Omega$  entspricht die zeitliche Integration für das betrachtete Zeitfenster  $[0, T]$ . Somit ist r6umliche Orthonormalit6t der Moden (A.7) der zeitlichen Orthogonalit6t (A.8b) analog.

Ebenso kann man statt der r6umlichen Autokorrelation (A.5) die zeitliche Korrelationsfunktion

$$C(t, s) := (\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}'(\mathbf{x}, s))_\Omega \quad (\text{A.11})$$

betrachten. Das Analogon für die Fredholm'sche Gleichung (A.6) im Ortsbereich ist das Eigenproblem für die Eigenfunktion  $a_i(t)$  mit dem Eigenwert  $\mu_i$ ,

$$\frac{1}{T} \int_0^T ds C(t, s) a_i(s) = \mu_i a_i(t), \quad (\text{A.12})$$

wobei die Eigenwerte geordnet seien,  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \dots$ . Für ein gegebenes Schnappschuss-Ensemble gilt  $\mu_i = \lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Aus der Symmetrie der zeitlichen Korrelationsfunktion folgt die Orthogonalit6t der Fourier-Koeffizienten (A.8b). Die Normierungsbedingung sei

$$\overline{a_i a_j} = \frac{1}{T} \int_0^T dt a_i(t) a_j(t) = \lambda_i \delta_{ij}. \quad (\text{A.13})$$

Damit lautet die Entwicklung der Korrelationsfunktion analog zu (A.9):

$$C(t, s) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(s) a_i(t). \quad (\text{A.14})$$

Die Karhunen-Loève-Moden berechnen sich zu

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{x}) := \overline{a_i(t) \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)}. \quad (\text{A.15})$$

Die Karhunen-Loève-Zerlegung im zeitlichen Bereich liefert die gleichen Informationen wie die Zerlegung im Ortsbereich.

### A.3 Schnappschuss-Methode

Die Schnappschuss-Methode [117] ist eine Diskretisierung der Karhunen-Loève-Zerlegung im zeitlichen Bereich. Gegeben sei ein Ensemble von  $M$  Schnappschüssen zu den Zeiten  $t_m$ ,

$$\mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}) := \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_m), \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (\text{A.16})$$

Die mittlere Strömung berechnet sich zu

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) := \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}). \quad (\text{A.17})$$

Die diskrete Form der zeitlichen Korrelationsfunktion ist die Matrix  $\mathbf{C} := (C_{mn})_{m,n=1,\dots,M}$  mit

$$C_{mn} := \frac{1}{M} (\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}_0, \mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}_0)_{\Omega}. \quad (\text{A.18})$$

Die Eigenvektoren  $\mathbf{a}^{[i]} = (a_1^{[i]}, \dots, a_M^{[i]})$  zu den Eigenwerten  $\lambda_i$  erfüllen

$$\mathbf{C} \mathbf{a}^{[i]} = \lambda_i \mathbf{a}^{[i]}, \quad (\text{A.19})$$

wobei die Symmetrie von  $\mathbf{C}$  die Orthonormierung  $\mathbf{a}^{[i]} \cdot \mathbf{a}^{[j]} = \delta_{ij}$  erlaubt.

Die Karhunen-Loève-Moden berechnet sich nun zu

$$\mathbf{u}_i := \frac{1}{\sqrt{M\lambda_i}} \sum_{m=1}^M a_m^{[i]} (\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}_0). \quad (\text{A.20})$$